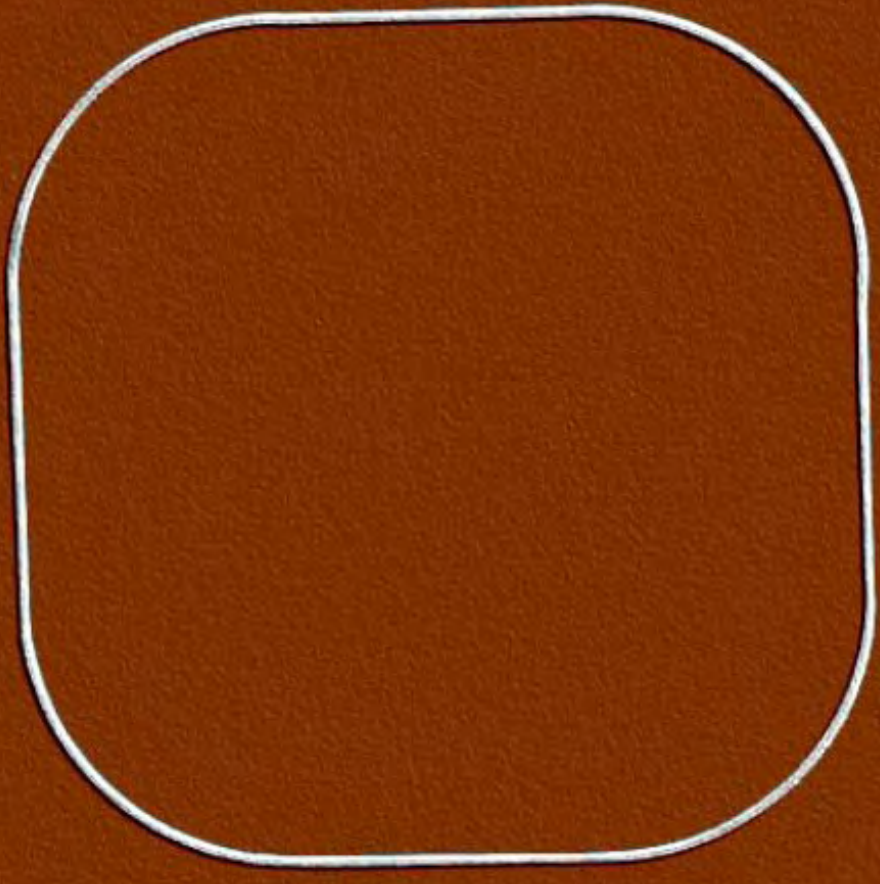
EMIL SIMION

ELECTROTEHNICĂ



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI – 1979

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. dr. ing. **EMIL SIMION**

ELECTROTEHNICĂ

Manual pentru subingineri

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI

Referent ştiinţific : **prof. dr. doc. ing. C.I. Mocanu**

Redactor : **ing. Alexandra Sulițeanu Moraru**
Tehnoredactor : **Viorica Condopol**
Coperta : **Victor Wegeman**

PREFAȚĂ

Prezentul curs se adresează studenților de la secțiile de subingineri cu profil electric (Mașini și aparate electrice, Rețele electrice, Electromecanică tehnologică etc.), dar el poate fi folosit și ca bibliografie pentru cursurile de Electrotehnică generală de către studenții secțiilor de ingineri sau subingineri cu profil neelectric.

S-au presupus cunoscute o serie de cunoștințe din Electricitate și Electromagnetism, iar unele noțiuni de calcul vectorial au fost prezentate în anexă.

Cursul conține două părți mari: Bazele fizice ale electrotehnicii (Electrostatica, Electrocinetica, Electrodinamica) și Circuite electrice (Regimul permanent periodic sinsoidal, Cuadripoli, Regimul tranzitoriu, Regimul nesinusoidal, Linii electrice lungi etc.).

Fără a neglija aspectul teoretic al chestiunilor tratate, s-a pus un accent mai mare pe aplicațiile practice, în acest sens cursul conținînd numeroase exemple de calcul.

AUTORUL

CUPRINS

Introducere 9

Cap. 1. **Cîmpul electrostatic în vid** 14
1.1. Cîmpul electromagnetic. Intensitatea cîmpului electric în vid. Sarcina electrică 14
1.2. Teorema lui Coulomb. Permitivitatea vidului 16
1.3. Cîmpul electrostatic produs în vid de o sarcină punctiformă. Principiul superpoziției 17
1.4. Teorema lui Gauss 18
1.5. Potențialul cîmpului electrostatic în vid 20
1.6. Teorema potențialului cîmpului electric coulombian 24
1.7. Aplicații la calculul cîmpului și potențialului electrostatic în vid 26

Cap. 2 **Cîmpul electric în substanță** 31
2.1. Polarizare electrică temporară și permanentă 31
2.2. Dipolul în cîmp electric 32
2.3. Polarizație. Sarcini de polarizație 33
2.4. Intensitatea cîmpului electric în interiorul corpurilor polarizate. Inducția electrică 34
2.5. Unele legi generale și de material. Particularizări 37
2.6. Corpul conductor în cîmp electrostatic 41
2.7. Suprafețe de discontinuitate în cîmp electric. Refracția liniilor de cîmp . . . 43
2.8. Metodele electrostaticii 44

Cap. 3. **Capacitate electrică** 52
3.1. Condensatoare 52
3.2. Calculul capacităților 53
3.3. Teoremele capacităților echivalente 57
3.4. Relațiile lui Maxwell privitoare la capacități 58

Cap. 4. **Energia și forțele electrostatice** 62
4.1. Energia cîmpului electrostatic 62
4.2. Densitatea de volum a energiei cîmpului electrostatic 64
4.3. Forțele electrostatice 65
4.4. Presiunea electrostatică 68
4.5. Forțele care se exercită la suprafața de separație a două medii dielectrice . . 69

Cap. 5. **Tensiune electromotoare. Cîmpuri imprimate** 72
5.1. Tensiune electromotoare 72
5.2. Cîmpuri imprimate 74
5.3. Curentul electric în regim staționar 78

Cap. 6. **Unele legi generale și de material. Particularizări** 81
6.1. Legea conservării sarcinii 81
6.2. Legea conducției electrice (legea lui Ohm) 83
6.3. Legea transformării energiei în conductoare (legea lui Joule—Lenz) 85
6.4. Legea electrolizei 86

Cap. 7. **Circuite de curent continuu** 87
7.1. Mărimile, parametrii şi legile circuitelor liniare de curent continuu 87
7.2. Transformarea schemelor circuitelor liniare de curent continuu 94
7.3. Metode de analiză a circuitelor liniare de curent continuu (rezolvarea circuitelor) 100
7.4. Circuite neliniare de curent continuu 110
Cap. 8. **Cîmpul magnetic în vid** 123
8.1. Cîmpul magnetic. Inducţia magnetică 123
8.2. Forţe particulare în cîmp magnetic 124
8.3. Formula lui Biot-Savart-Laplace 128
8.4. Tensiune magnetomotoare. Solenaţie 129
Cap. 9. **Cîmpul magnetic în substanţă** 132
9.1. Magnetizare temporară şi permanentă. Magnetizaţie 132
9.2. Interpretarea microscopică a magnetizaţiei 133
9.3. Intensitatea cîmpului magnetic şi inducţia magnetică în substanţă. Legi specifice 134
9.4. Feromagnetismul. Teoria lui Weiss 138
9.5. Potenţialul magnetic vector. Ecuaţia lui Poisson pentru cîmpul magnetic. . 141
9.6. Legea circuitului magnetic (legea curentului total). 144
9.7. Suprafeţe de discontinuitate în cîmpul magnetic. Refracţia liniilor de cîmp . 147
Cap. 10. **Inducţia electromagnetică** 149
10.1. Legea inducţiei electromagnetice 149
10.2. Efectul Hall 152
Cap. 11. **Inductivităţile circuitelor electrice** 155
11.1. Inductivităţi proprii şi mutuale 155
11.2. Calculul inductivităţilor 157
11.3. Exprimarea t.e.m. induse cu ajutorul inductivităţilor 161
Cap. 12. **Circuite magnetice** 163
12.1. Legea lui Ohm pentru circuite magnetice 163
12.2. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice 165
12.3. Teoremele reluctanţelor echivalente 168
12.4. Relaţia între inductivitate şi reluctanţă 169
12.5. Circuite magnetice neliniare 169
Cap. 13. **Energia şi forţele cîmpului magnetic** 171
13.1. Energia cîmpului magnetic 171
13.2. Densitatea de volum a energiei magnetice 173
13.3. Forţe magnetice 175
Cap. 14. **Elemente de circuit în regim cvasistaţionar** 177
14.1. Regimuri de funcţionare ale circuitelor electrice 177
14.2. Relaţii fundamentale pentru studiul circuitelor 178
14.3. Elemente de circuit 180
Cap. 15. **Mărimile, parametrii şi teoremele circuitelor liniare de curent alternativ** . . 186
15.1. Definiţii. Valori caracteristice 186
15.2. Regimul permanent sinusoidal al circuitelor liniare simple, determinat prin metoda directă 190
15.3. Puteri în regim sinusoidal 194
15.4. Reprezentarea simbolică a mărimilor sinusoidale 197
15.5. Caracterizarea în complex a circuitelor liniare 205
15.6. Teoremele circuitelor liniare sub formă complexă 209

Cap. 16. **Impedanţe echivalente** 213
16.1. Impedanţa echivalentă a unei conexiuni serie 213
16.2. Impedanţa echivalentă a unei conexiuni paralel 214
16.3. Conexiunea mixtă a impedanţelor necuplate inductiv 216
16.4. Impedanţa echivalentă a circuitelor cuplate inductiv 217
16.5. Linia monofazată scurtă în curent alternativ 219
16.6. Condensatorul cu pierderi 221
16.7. Bobina cu pierderi. 225

Cap. 17. **Rezonanţa în circuite electrice de curent alternativ sinusoidal** 229
17.1. Rezonanţa serie (rezonanţa tensiunilor) 229
17.2. Rezonanţa paralel (rezonanţa curenţilor) 232
17.3. Rezonanţa la conectarea serie-paralel 234
17.4. Îmbunătăţirea factorului de putere 235
17.5. Circuite cu reactanţe semicompensate 237
17.6. Oscilaţii de energie în circuite de curent alternativ 238

Cap. 18. **Cuadripoli electrici** 242
18.1. Ecuaţiile cuadripolului 242
18.2. Scheme echivalente ale cuadripolului 243
18.3. Încercarea în gol şi în scurtcircuit a cuadripolului 244
18.4. Impedanţa caracteristică şi constanta de propagare a cuadripolului simetric 245
18.5. Filtre electrice de frecvenţă 248

Cap. 19. **Diagrame — loc geometric** 253
19.1. Diagrame prin urme 253
19.2. Inversiunea în planul real şi în planul complex 255

Cap. 20. **Metode de analiză a circuitelor liniare funcţionînd în regim permanent periodic sinusoidal** 259
20.1. Metoda suprapunerii efectelor 259
20.2. Metode de transfigurare 261
20.3. Metoda curenţilor de bucle sau curenţilor de ochiuri (curenţi independenţi) 264
20.4. Metoda tensiunilor nodale (potenţialelor nodurilor) 265
20.5. Metoda separării puterilor 267

Cap. 21. **Sisteme trifazate. Caracterizare. Proprietăţi** 269
21.1. Sisteme trifazate simetrice 269
21.2. Producerea sistemului trifazat simetric de tensiuni electromotoare 272
21.3. Conexiunile sistemelor trifazate 273
21.4. Cîmpuri magnetice rotitoare 276

Cap. 22. **Rezolvarea circuitelor electrice trifazate** 280
22.1. Rezolvarea circuitelor trifazate echilibrate, alimentate cu un sistem simetric de tensiuni 280
22.2. Rezolvarea circuitelor trifazate dezechilibrate, alimentate cu un sistem nesimetric de tensiuni 285

Cap. 23. **Metoda componentelor simetrice** 291
23.1. Teorema componentelor simetrice 291
23.2. Filtre pentru componente simetrice 292
23.3. Cîteva proprietăţi ale componentelor simetrice 294
23.4. Circuite trifazate echilibrate, alimentate cu tensiuni nesimetrice 295
23.5. Circuite trifazate dezechilibrate, alimentate cu tensiuni nesimetrice . . . 297

23.6. Aplicarea metodei componentelor simetrice la calculul curenților de scurt-circuit 299
23.7. Calculul puterilor în circuite trifazate cu ajutorul componentelor simetrice 301
Cap. 24. **Regimul tranzitoriu al circuitelor electrice liniare** 302
24.1. Generalități. Teoremele comutației 302
24.2. Regimul tranzitoriu al circuitelor *R, L* și *R,C* 305
24.3. Regimul tranzitoriu al circuitelor *R, L, C* serie 311
24.4. Metoda operațională de analiză a circuitelor electrice liniare în regim tranzitoriu 316
Cap. 25. **Studiul regimului permanent periodic nesinusoidal** 327
25.1. Reprezentarea mărimilor periodice nesinusoidale printr-o serie Fourier . . 328
25.2. Forme particulare ale seriei Fourier 331
25.3. Determinarea coeficienților seriei Fourier din graficul funcției (metoda Thomson-Runge) 335
25.4. Seria Fourier complexă 336
25.5. Valori caracteristice ale mărimilor periodice nesinusoidale 339
25.6. Puteri în regim nesinusoidal 342
25.7. Analiza circuitelor liniare în regim periodic permanent și nesinusoidal . . . 345
25.8. Semnale periodice care nu se dezvoltă în serie Fourier 349
25.9. Circuite neliniare în regim permanent periodic 352
Cap. 26. **Linii electrice lungi** 359
26.1. Circuite cu parametri repartizați 359
26.2. Parametri lineici 359
26.3. Ecuațiile liniilor electrice lungi 361
26.4. Linii lungi omogene bifilare în regim permanent sinusoidal 363
26.5. Undele de tensiune și de curent în cazul liniilor lungi în regim sinusoidal 366
26.6. Linia fără distorsiuni. Linia fără pierderi 369
Cap. 27. **Cîmpul electromagnetic variabil în mediu dielectric și conductor** 371
27.1. Ecuațiile lui Maxwell 371
27.2. Unda electromagnetică plană 373
27.3. Teorema energiei electromagnetice 376
27.4. Cîmpul electromagnetic variabil în conductoare masive 378
Anexă — Noțiuni de calcul vectorial 391
Bibliografie 400

INTRODUCERE

Cursul de „Electrotehnică" are ca obiect studiul fenomenelor electrice şi magnetice din punct de vedere al aplicaţiilor tehnice.

1. DEZVOLTAREA ENERGETICII ŞI ELECTROTEHNICII ÎN ŢARA NOASTRĂ

În concordanţă cu obiectivul fundamental formulat de programul partidului — făurirea societăţii socialiste multilateral dezvoltate şi înaintarea României spre comunism — planul cincinal 1976—1980, care reprezintă al doilea cincinal al acestei etape, strategice, va asigura în continuare o dezvoltare impetuoasă a bazei tehnico-materiale a societăţii.

Progresul tehnic şi social al societăţii moderne este strîns legat de dezvoltarea producţiei de energie electrică şi a industriei electrotehnice şi electronice.

Proprietăţile remarcabile ale energiei electromagnetice, numită incomplet energie electrică (se produce uşor şi cu randament ridicat ; se transportă uşor şi practic instantaneu la mari distanţe ; se divide şi se distribuie uşor cu ajutorul circuitelor electrice ; se transformă cu un randament ridicat în orice altă formă de energie ; este o energie nepoluantă), fac ca producerea ei în centrale electrice şi utilizarea în cele mai diverse domenii ale activităţii productive să capete un avînt nemaiîntîlnit.

În figura 1 este redată evoluţia rapidă a puterii instalate în centrale electrice şi a producţiei de energie electrică în ţara noastră după 1950, anul adoptării primului plan decenal de elctrificare, precum şi comparaţia cu anul 1938. Se evidenţiază de asemenea puterea instalată cît şi producţia de energie electrică prevăzută pentru anii 1980 şi 1990, aşa cum rezultă din Directivele Congresului al XI-lea al P.C.R. La nivelul anului 1980, circa 44% din producţia de energie electrică se va obţine pe bază de cărbuni. În perioada 1976—1980 se prevede punerea în funcţiune a unei puteri de 5 400 ÷ 5 740 MW, din care circa 1 700 MW în centrale hidroelectrice şi circa 3 200 MW în termocentrale pe bază de cărbuni cu agregate de mare putere.

La nivelul anului 1990, din totalul puterii instalate peste 60% o vor reprezenta centralele hidroelectrice şi termoelectrice pe bază de cărbuni. Producţia de energie electrică se va ridica la un nivel de 130—140 miliarde

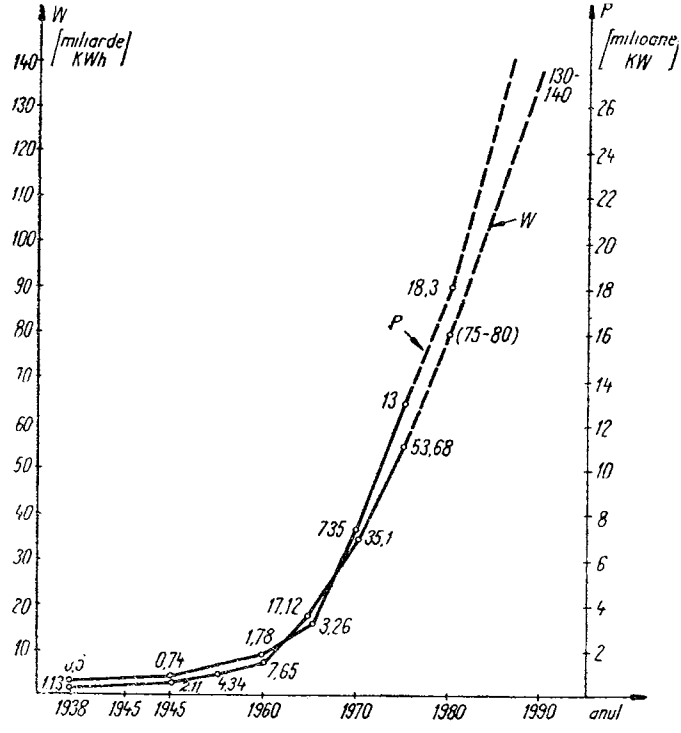


Fig. 1.

KWh în anul 1990, asigurînd necesităţile tuturor ramurilor economiei şi populaţiei în condiţii optime.

În anii viitori se va acorda o atenţie deosebită economisirii energiei electrice; vor fi luate măsuri pentru introducerea în producţie a utilajelor şi tehnologiilor cu randamente energetice ridicate; în anii cincinalului 1976—1980, consumurile specifice medii la energia electrică se vor reduce cu circa 12%.

Industria electrotehnică şi electronică, ramură importantă în cadrul construcţiilor de maşini, va avea o dezvoltare ascendentă. În anul 1980, faţă de anul 1975, producţia de motoare electrice va fi cu 194 ÷ 227% mai mare; mijloacele de automatizare şi ale tehnicii de calcul vor creşte cu 266 ÷ 301%; maşinile şi aparatele electrice de uz casnic vor ajunge la un nivel de 164 ÷ 177% faţă de 1975. Ca urmare, aşa cum prevăd Directivele Congresului al XI-lea al P.C.R., industria electrotehnică şi electronică va deţine în 1980 peste 20% din totalul construcţiilor de maşini, asigurîndu-se creşterea rapidă a producţiei de mijloace de automatizare, a tehnicii de calcul — inclusiv echipamente periferice şi de prelucrare a datelor — echipamente de electronică industrială, aparatură de măsură şi control, radiocomunicaţii profesionale, electronică medicală şi aparatură ştiinţifică. O atenţie deosebită se va acorda realizării de noi tipuri de maşini-unelte, care să încorporeze aparatură electronică de comandă şi reglare fabricată în ţară.

Echipamentele de acționare electrică și ale mijloacelor de automatizare, pe bază de noi componente electronice și circuite integrate de producție indigenă, vor ocupa un loc de frunte în industria electrotehnică și electronică a anului 1980. În perspectiva anilor 1990 numai industria electronică va reprezenta 16÷16,5% din producția totală a construcțiilor de mașini.

Pentru înfăptuirea acestor obiective mărețe, sarcini importante revin cadrelor de specialiști din domeniul electrotehnicii care trebuie să-și însușească în școli și facultăți cunoștințe temeinice despre cele mai noi cuceriri ale științei și tehnologiei și să fie capabili să mînuiască tehnica avansată, s-o folosească în practică și să o perfecționeze continuu.

2. EVOLUȚIA CUNOȘTINȚELOR DESPRE FENOMENELE ELECTRICE ȘI MAGNETICE

Cunoștințele despre fenomenele electrice și magnetice s-au dezvoltat mult mai tîrziu decît acelea despre fenomenele mecanice, termice sau optice, deoarece omul nu este înzestrat cu simțuri care să sesizeze manifestările cîmpului electromagnetic în mod direct.

În prezent noi știm că între fenomenele electrice și cele magnetice există o strînsă legătură și această teză stă la baza întregii științe contemporane asupra fenomenelor electromagnetice. Gîndirea științifică a ajuns însă la această convingere numai în urma unei acumulări îndelungate de fapte experimentale; multe sute de ani, fenomenele electrice și fenomenele magnetice au fost considerate fenomene total independente.

Deși electricitatea și magnetismul erau cunoscute încă din antichitate (electrizarea prin frecare a chihlimbarului este descrisă de Thales din Milet în sec. VI. î.e.n., iar magnetismul natural al oxidului de fier din localitatea Magnezia (Asia Mică) era cunoscut cu mult înainte), prima lucrare care tratează fenomenele electrice și magnetice este publicată abia în anul 1600 („Despre magneți"). Autorul lucrării, fizicianul W. Gilbert, deși tratează și fenomene electrice și fenomene magnetice, nu întrevede nici o legătură între acestea. Descoperirea a numeroase fapte experimentale (mașina electrostatică a lui O. Guericke în 1672, butelia de Leyda etc.) nu au avut consecințe teoretice sau practice importante, pînă spre sfîrșitul secolului XVIII.

În 1753 M. V. Lomonosov comunică observațiile și concluziile sale teoretice despre electricitatea atmosferică. Cercetări în aceeași direcție și cam în aceeași perioadă efectuează și B. Franklin, care a inventat paratrăsnetul.

Prima relație cantitativă care caracterizează interacțiunile mecanice ale particulelor încărcate electric și prin analogie, ale maselor magnetice, a fost stabilită experimental în anul 1785 de către Ch. Coulomb. Coulomb a observat încă de atunci diferența esențială dintre masele magnetice și sarcinile electrice: electricitatea pozitivă poate fi separată fără dificultate de cea negativă, însă separarea masei magnetice pozitive de cea negativă nu se poate realiza.

În anul 1790 L. Galvani descoperă fenomenele galvanice, care i-au permis fizicianului A. Volta construirea în anul 1800 a primei pile elec-

trice. Din acest moment încep cercetări ştiinţifice asupra curentului electric de conducţie (curent continuu) obţinut de la pila electrică a lui Volta.

Prima mare descoperire după anul 1800 aparţine lui C. H. Oersted, care, în 1819, prin experienţele sale arată interacţiunea mecanică dintre un conductor parcurs de curent şi un ac magnetic. Această descoperire stabileşte pentru prima dată o legătură între cele două clase de fenomene considerate pînă atunci fără legătură între ele: fenomenele electrice şi cele magnetice. Totodată, A. M. Ampère (1820) studiind forţele electrodinamice arată identitatea dintre un electromagnet şi un magnet permanent. El a emis ipoteza că şi în cazul magneţilor permanenţi există curenţi „moleculari", care sînt cauza efectivă a acţiunilor mecanice exterioare ale magnetului. Această ipoteză a fost confirmată ulterior de către fizica atomică, care a identificat aceşti curenţi „moleculari" drept curenţii electrici datorită deplasării electronilor pe orbite în jurul nucleului. În plus există şi un magnetism intrinsec al fiecărei particule elementare în parte (magnetismul de spin), care joacă un rol însemnat în comportarea materialelor feromagnetice. G. S. Ohm (1826) stabileşte legea sa în circuite de curent continuu neramificate, iar G. R. Kirchhoff (1847) formulează regulile de rezolvare a circuitelor ramificate.

Altă mare descoperire aparţine lui M. Faraday (1831), cunoscută sub denumirea de legea inducţiei electromagnetice (apariţia unui curent electric într-un circuit închis, cînd acesta este străbătut de un flux variabil). În anul 1833, E. H. Lenz stabileşte sensul curentului indus. Descoperirea legii inducţiei electromagnetice a condus la obţinerea curentului electric alternativ. În anul 1834 Faraday formulează şi legile electrolizei. În afară de aceste descoperiri, Faraday introduce pentru prima dată noţiunea de „cîmp", prin intermediul căruia se transmit acţiunile mecanice în spaţiu şi timp. Concepţia de cîmp a fost teza fundamentală care a permis explicarea corectă a fenomenelor electrice şi magnetice, constituind un pas hotărîtor în dezvoltarea fizicii din a doua jumătate a secolului al XIX-lea.

Meritul de a fi creat teoria cîmpului electromagnetic aparţine însă lui J. C. Maxwell, care a îmbrăcat într-o formă matematică concepţia lui Faraday. Maxwell a prevăzut teoretic existenţa undelor electromagnetice şi a curentului electric de deplasare (1862), a elaborat teoria electromagnetică a luminii (1865) şi a publicat în anul 1873 celebra lucrare „Tratat despre electricitate şi magnetism", care pune bazele teoriei *macroscopice* clasice a electromagnetismului. Verificarea experimentală a teoriei lui Maxwell a fost efectuată de H. Hertz (1888), care obţine şi propagă undele electromagnetice.

În decursul timpului numeroşi savanţi de renume, inventatori, cercetători şi experimentatori au contribuit la progresul Electrotehnicii. Dintre aceştia merită citaţi: Edison, Tesla, Joule, Silling, Morse, Ruhmkorff, Heaviside, Weber, Mitkevici, Arkadiev, Kalantarov, Popov etc.

În ţara noastră au adus contribuţii însemnate în domeniul electrotehnicii: N. Vasilescu Karpen, C. Budeanu, Şt. Procopiu, Pl. Andronescu, R. Răduleţ, I. S. Antoniu, precum şi şcolile de Electrotehnică din Bucureşti, Timişoara şi Iaşi.

N. Vasilescu-Karpen a elaborat teoria electronică a lichidelor, punînd în evidenţă rolul electronilor în fenomenele electrochimice. Lui îi aparţine şi propunerea folosirii curenţilor purtători de înaltă frecvenţă în telefonia la mare distanţă.

C. Budeanu a avut o contribuţie importantă în studierea regimului deformant şi a puterii reactive în circuite electrice, introducînd noţiunea de putere deformantă.

Şt. Procopiu a calculat cel dintîi momentul magnetic al electronului (1912) numit impropriu magnetonul lui Bohr. A descoperit efectul dublării frecvenţei în fire de fier parcurse de curenţi alternativi şi aflate în cîmp magnetic (efectul Procopiu). A studiat magnetismul terestru în diverse zone ale ţării.

Pl. Andronescu a dezvoltat şcoala de electrotehnică teoretică din România, avînd contribuţii însemnate în probleme de cîmpuri electromagnetice şi în măsurători electrice.

R. Rădulet are contribuţii importante în dezvoltarea teoriei cîmpului electromagnetic în medii conductoare masive, definind parametrii tranzitorii într-o formă generală. A întemeiat şcoala românească de cercetare electrotehnică bazată pe teoria cîmpului. Are de asemenea contribuţii în electrotermie, sudură electrică, frîne de inducţie, maşini electrice speciale etc.

I. S. Antoniu are contribuţii în domeniul regimurilor deformante, al reţelelor trifazate, introducînd totodată calculul matriceal în electrotehnică.

Buni cunoscători ai cuceririlor ştiinţei electrotehnice pe plan mondial, utilizînd şi dezvoltînd moştenirea înaintaşilor lor, tehnicienii şi inginerii români creează noi instalaţii energetice, electrotehnice şi electronice apreciate şi căutate în multe ţări din Europa, Asia şi Africa, contribuind şi prin aceasta la ridicarea prestigiului ştiinţei şi tehnicii din R.S. România.

CAPITOLUL 1

CÎMPUL ELECTROSTATIC ÎN VID

1.1. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC. INTENSITATEA CÎMPULUI ELECTRIC ÎN VID. SARCINA ELECTRICĂ

Cîmpul electromagnetic este o formă aparte de existenţă a materiei, caracterizat prin aceea că exercită acţiuni pondero-motoare (forţe şi momente) asupra corpurilor. Ca orice formă de materie cîmpul electromagnetic posedă energie.

Fenomenele electrice şi magnetice pot exista atît prin particule elementare (sau corpuri) încărcate cu sarcină electrică (pozitivă sau negativă), şi care sînt repartizate într-un spaţiu foarte restrîns, cît şi prin cîmpul lor electromagnetic, care le înconjoară. Domeniul în care nu există substanţă şi deci sarcini electrice, ci numai cîmp electromagnetic, îl denumim convenţional vid. Vid în sensul absolut nu poate exista întrucît materia nu este discontinuă. Acolo unde nu există subatanţă există cîmp (cîmp de gravitaţie etc.).

Cîmpul electromagnetic are două aspecte particulare: cîmpul electric şi cîmpul magnetic. Separarea lor are un caracter relativ şi aceasta depinde de sistemul de referinţă. În cazul sarcinilor electrice imobile apare numai cîmpul electric. În cazul magneţilor permanenţi imobili, în exteriorul lor se poate constata numai prezenţa cîmpului magnetic. Această separare relativă a cîmpului electric şi magnetic dă posibilitatea studierii lor separate.

Cîmpul electric este deci unul din cele două aspecte ale cîmpului electromagnetic, care se manifestă prin forţa mecanică ce acţionează asupra unui corp încărcat electric, imboil, introdus în cîmp.

Pentru a pune în evidenţă existenţa cîmpului electric este necesar în primul rînd să existe un corp de probă încărcat cu electricitate, iar în al doilea rînd corpul de probă să fie imobil şi cu sarcină invariabilă, pentru că altfel acţionează asupra lui şi cîmpul magnetic. Corpul de probă trebuie să aibă o stare de electrizare astfel aleasă încît să nu modifice starea electrică a sistemului de explorat; de aceea corpul de probă se încarcă cu o sarcină suficient de mică. Corpul de probă se ia punctual, pentru a permite explorarea unor regiuni din spaţiu oricît de mici.

Obţinerea electrizării, deci încărcarea unui corp cu electricitate se poate face cel mai simplu prin frecare (de exemplu o bară de sticlă se freacă cu

mătase) sau prin iradiere cu raze X sau ultraviolete, prin deformarea unor cristale, prin încălzire, prin efecte chimice etc.

Prin experienţă se constată că forţa ce acţionează asupra corpului de probă introdus în cîmp depinde de punctul P în care este situat corpul şi de starea de electrizare η a sa:

$$\bar{F} = \bar{F}(P, \eta). \tag{1.1}$$

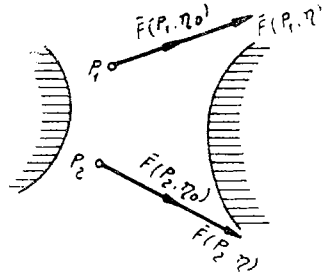


Fig. 1.1.

Considerînd corpul de probă cu diverse stări de electrizare (η_0, η etc.), situat în diverse puncte (P_1, P_2 etc.), într-un spaţiu unde se presupune existenţa cîmpului (fig. 1.1), asupra lui acţionează forţe care satisfac relaţia:

$$\bar{F} = q(\eta) \cdot \bar{E}_v(P). \tag{1.2}$$

Deci forţa care se exercită asupra corpului de probă situat în vid este egală cu produsul dintre o mărime scalară q numită *sarcină electrică* (depinde numai de starea lui de electrizare) şi o mărime vectorială $\bar{E}_v$ numită *vectorul intensităţii cîmpului electric în vid* (depinde numai de punctul considerat în cîmp, nu şi de starea de electrizare a corpului de probă). Sensul vectorului $\bar{E}_v$ defineşte sarcina pozitivă care corespunde încărcării cu sarcină electrică a sticlei frecată cu mătase.

Relaţia (1.2) se poate scrie şi sub forma:

$$\bar{E}_v = \frac{\bar{F}}{q} \quad \text{sau} \quad \bar{E}_v = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta q}. \tag{1.3}$$

În relaţia (1.2) s-au introdus două mărimi noi, numite *mărimi primitive:* q şi $\bar{E}_v$. Relaţia este univocă dacă pentru una din aceste două mărimi se alege în mod arbitrar unitatea de măsură. Se convine a se alege pentru q unitatea de măsură, numită coulomb (C).

Din (1.3) rezultă că intensitatea cîmpului electric în vid este numeric egală cu forţa care se exercită asupra sarcinii de probă egală cu unitatea, introdusă în cîmp. Unitatea de măsură pentru $\bar{E}_v$ nu se numeşte conform (1.3) newton pe coulomb, ci este *volt pe metru* (V/m) (vezi par.1.5).

Dacă se examinează toate punctele spaţiului în care există cîmp electric ($\bar{E}_v \neq 0$), se pot construi nişte linii care au proprietatea că tangenta la aceste linii are în orice punct direcţia locală a vectorului intensităţii $\bar{E}_v$. Aceste linii se numesc linii de cîmp. Prin convenţie liniile de cîmp pleacă de la sarcina pozitivă spre sarcina negativă (fig. 1.2).

Corpurile încărcate cu sarcină pot avea această sarcină distribuită în întreg volumul şi se defineşte în acest caz *densitatea de volum a sarcinii* prin limita raportului:

$$\rho_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \tag{1.4}$$

Această distribuţie a sarcinii în volum se întîlneşte în cazul materialelor izolante.

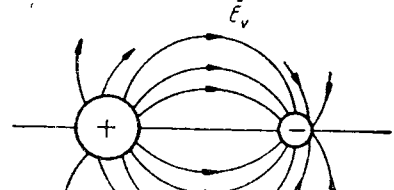


Fig. 1.2.

Sarcina din întreg volumul V rezultă:

$$q = \int_V \rho_V \cdot dV. \tag{1.5}$$

Dacă sarcina este repartizată pe suprafaţa unui conductor sau a unui izolant, se defineşte *densitatea de suprafaţă a sarcinii* ca limita raportului:

$$\rho_s = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{dq}{dA}, \tag{1.6}$$

iar sarcina q de pe întreaga suprafaţă A va fi:

$$q = \int_A \rho_s \cdot dA. \tag{1.7}$$

Dacă sarcina este repartizată pe conductoare filiforme, se defineşte *densitatea de linie a sarcinii* electrice ca limita raportului:

$$\rho_l = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds}, \tag{1.8}$$

iar sarcina q de pe întregul contur C va fi:

$$q = \int_C \rho_l \cdot ds. \tag{1.9}$$

Pentru sarcini electrice e valabil principiul conservării sarcinii. Pentru un sistem de corpuri încărcate cu sarcini şi înconjurate de materiale izolante avem:

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = \text{const.}, \tag{1.10}$$

adică dacă într-un sistem de corpuri, izolat de exterior, dispare o sarcină de pe un corp, ea va apare pe un alt corp.

Sarcinile electrice (fiind atît pozitive cît şi negative) *se combină algebric.*

Dacă $\sum_{k=1}^{n} q_k = 0$, se spune că sistemul este neutru.

1.2. TEOREMA LUI COULOMB. PERMITIVITATEA VIDULUI

Coulomb a măsurat cu ajutorul balanţei de torsiune forţele care se exercită între două corpuri punctiforme încărcate cu sarcini electrice, imobile şi situate în vid. Variind valoarea sarcinilor, semnul lor cît şi distanţa între ele, el a găsit relaţia care determină forţa de atracţie sau de respingere exercitată între cele două sarcini şi anume:

$$\bar{F}_{12} = k_1 \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} \bar{u}_{12} = -\bar{F}_{21}. \tag{1.11}$$

Sensul forţei este astfel încît sarcinile electrice de acelaşi semn se resping, iar cele de semne contrare se atrag. Versorul $\bar{u}_{12}$ este dirijat de la corpul *1*

la corpul 2 (fig. 1.3) și este dat de relația:

Fig. 1.3.

$$\bar{u}_{12} = \frac{\bar{R}_{12}}{R_{12}}. \qquad (1.12)$$

Formula (1.11), numită teorema lui Coulomb, este valabilă numai pentru sarcini punctiforme (dimensiunile corpurilor mult mai mici decît distanța între ele) și în cazul stărilor invariabile în timp.

În această formulă k_1 este o constantă universală; ea depinde de sistemul de unități ales și este afectată de raționalizare. În varianta „rațională", formula lui Coulomb se scrie:

$$\bar{F}_{12} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi R_{12}^2} \bar{u}_{12}. \qquad (1.13)$$

Dacă notăm $k = \frac{1}{\varepsilon_0}$, avem relația

$$\bar{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2} \cdot \bar{u}_{12}, \qquad (1.14)$$

unde ε_0 se numește *permitivitatea absolută a vidului* și are valoarea (în sistemul internațional):

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9} \text{ farad/metru}. \qquad (1.15)$$

1.3. CÎMPUL ELECTROSTATIC PRODUS ÎN VID DE O SARCINĂ PUNCTIFORMĂ. PRINCIPIUL SUPERPOZIȚIEI

Cîmpurile electrostatice produse de sarcini punctiforme invariabile în timp se mai numesc cîmpuri coulombiene, întrucît ele respectă teorema forței lui Coulomb (relația 1.14). Considerînd (fig. 1.4) o sarcină punctiformă q care creează cîmp electric și introducînd sarcina de probă q_0 la distanța $\bar{R}$, asupra acesteia din urmă va acționa o forță dată de relația (1.14):

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{R^2} \cdot \bar{u}_R. \qquad (1.16)$$

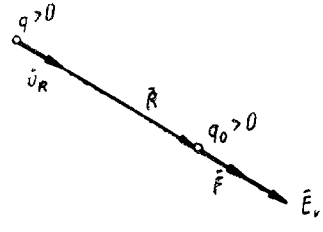


Fig. 1.4.

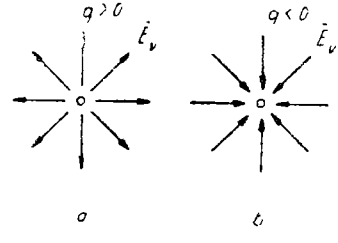


Fig. 1.5.

Din relaţiile (1.3), (1.12) şi (1.16) se deduce:

$$\bar{E}_v = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} \bar{R}. \tag{1.17}$$

Relaţia (1.17) ne dă expresia intensităţii cîmpului electric produs în vid de o sarcină punctiformă q, la distanţa $\bar{R}$ de această sarcină. Dacă sarcina care produce cîmpul este pozitivă, vectorul intensităţii cîmpului este dirijat de la sarcină în exterior (fig. 1.5, *a*), iar dacă sarcina este negativă este dirijat din exterior către sarcină (fig. 1.5, *b*).

Principiul superpoziţiei cîmpurilor coulombiene

Se constată experimental că dacă într-un punct al spaţiului acţionează cîmpul electric al mai multor corpuri încărcate, rezultanta se calculează ca o sumă vectorială a fiecărui cîmp în parte:

$$\bar{E}_v = \bar{E}_{v1} + \bar{E}_{v2} + \ldots + \bar{E}_{vn} = \sum_{k=1}^{n} \bar{E}_{vk}. \tag{1.18}$$

Aplicînd pentru fiecare cîmp în parte expresia sa, dată de relaţia (1.17), avem:

$$\bar{E}_v = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{R_k^3} \bar{R}_k. \tag{1.19}$$

Dacă sarcinile sînt distribuite în volum, pe o suprafaţă sau liniar, se obţine (cu 1.5, 1.7 şi 1.9) relaţia generală:

$$\bar{E}_v = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{R_k^3} \bar{R}_k + \int_C \frac{\rho_l \cdot \bar{R}}{R^3} ds + \int_A \frac{\rho_s \cdot \bar{R}}{R^3} dA + \int_V \frac{\rho_V \cdot \bar{R}}{R^3} dV \right]. \tag{1.20}$$

Această relaţie reprezintă principiul superpoziţiei sau suprapunerii cîmpurilor electrice coulumbiene.

1.4. TEOREMA LUI GAUSS

Pentru demonstrarea teoremei se utilizează noţiunile de flux şi de unghi solid. Considerînd (fig. 1.6) o suprafaţă deschisă A şi un element de arie $\overline{dA}$, care formează cu direcţia locală a intensităţii cîmpului electric $\bar{E}_v$ un unghi α, numim flux al vectorului $\bar{E}_v$ prin suprafaţa A, integrala:

$$\psi_{E_v} = \int_A \bar{E}_v \cdot \overline{dA} = \int_A E_v \cdot \cos\alpha \cdot dA. \tag{1.21}$$

Produsul $\cos\alpha \cdot dA$ se exprimă în funcţie de elementul de unghi solid $d\Omega$ (fig. 1.6, *b*) cu relaţia:

$$\cos\alpha \cdot dA = R^2 \cdot d\Omega. \tag{1.22}$$

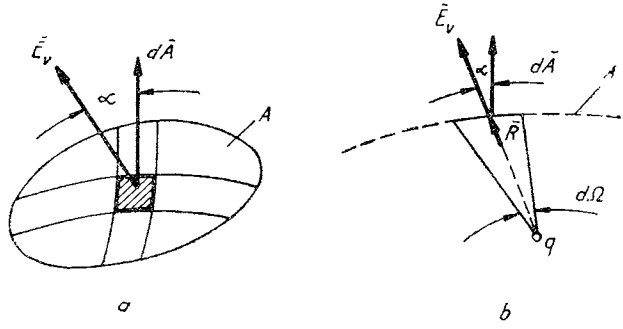


Fig. 1.6.

Cu (1.22) şi (1.17), relaţia (1.21) devine:

$$\psi_{E_v} = \int_A \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} R^2 \cdot d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_A d\Omega. \tag{1.23}$$

Cînd suprafaţa A este un plan infinit avem:

$$\int_A d\Omega = 2\pi, \tag{1.24}$$

iar cînd suprafaţa A este închisă (cuprinde în interior sarcina q), avem:

$$\oint_\Sigma d\Omega = 4\pi. \tag{1.25}$$

Dacă suprafaţa închisă Σ nu conţine în interior sarcina q care produce cîmpul (fig. 1.7), ea poate fi descompusă în două suprafeţe A_1 şi A_2 care se văd sub acelaşi unghi solid Ω, deci produc fluxuri egale în modul, dar de semne contrare, deoarece cos $\alpha_1 > 0$ şi cos $\alpha_2 < 0$. Suma acestor fluxuri este deci zero.

Cu aceste observaţii teorema lui Gauss se poate pune sub forma:

$$\oint_\Sigma \bar{E}_v \cdot \overline{dA} = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}. \tag{1.26}$$

Ea se enunţă astfel: *fluxul vectorului intensităţii cîmpului electric în vid* $\bar{E}_v$, *prin orice suprafaţă închisă* Σ, *este egal cu raportul dintre sarcina electrică* q_Σ *cuprinsă în interiorul suprafeţei şi permitivitatea absolută a vidului* ε_0.

Relaţia (1.26) reprezintă forma integrală a teoremei lui Gauss. Cu ajutorul acesteia se poate determina valoarea intensităţii cîmpului electric în vid în ipoteza că integrala din membrul întîi se poate calcula din considerente fizice, cum ar fi cazul unor sisteme cu simetrie (sferică, cilindrică etc).

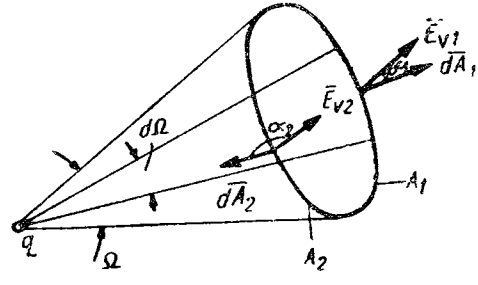


Fig. 1.7.

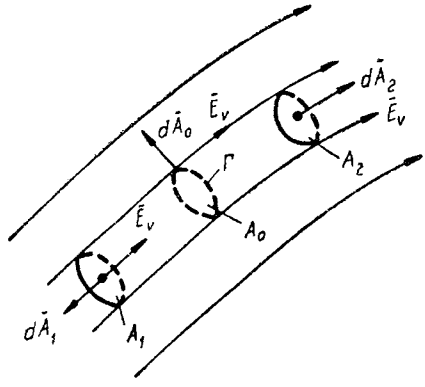


Fig. 1.8.

Întrucît fluxul vectorului $\bar{E}_v$ prin suprafața închisă Σ nu depinde de poziția sarcinii electrice din interiorul volumului delimitat de această suprafață, teorema lui Gauss este valabilă și în cazul cînd sarcina q_Σ se găsește pe un corp de formă oarecare, sau dacă q_Σ reprezintă o sumă algebrică a sarcinilor de mai multe corpuri. Este important numai ca toate aceste sarcini să fie situate în interiorul suprafeței considerate.

Considerînd un mic contur închis Γ, totalitatea liniilor de cîmp care trec prin toate punctele acestui contur formează un tub, numit *tub de flux* (fig. 1.8). Aplicînd teorema lui Gauss unui tub de flux, mărginit de suprafețele A_1, A_2 și A_0 (suprafețele A_1 și A_2 sînt normale pe liniile de cîmp, iar A_0 este tangentă la liniile de cîmp), avem $\oint_\Sigma \bar{E}_v \cdot \overline{dA} = 0$, deoarece în interior nu există sarcini electrice. Descompunînd integrala pe cele trei porțiuni (A_1, A_2 și A_0) și ținînd cont de faptul că fluxul prin suprafața A_0 este nul, deoarece $\overline{dA}_0 \perp \bar{E}_v$, avem:

$$\int_{A_1} \bar{E}_v \cdot \overline{dA}_1 + \int_{A_2} \bar{E}_v \cdot \overline{dA}_2 = 0 \tag{1.27}$$

sau:

$$\psi_{A_1} - \psi_{A_2} = 0. \tag{1.28}$$

Relația (1.28) arată că fluxul se conservă în lungul unui tub de flux.

Se poate introduce noțiunea de *tub unitate*, adică un tub de flux pentru care secțiunea sa transversală este străbătută de un flux egal cu unitatea. Dacă convenim ca fiecare tub unitate să fie reprezentat în spațiu printr-o singură linie a intensității cîmpului, spectrul cîmpului ne permite să calculăm valoarea intensității cîmpului ca o densitate a acestor tuburi, adică:

$$E_v = \frac{d\psi_{\bar{E}v}}{dA}. \tag{1.29}$$

1.5. POTENȚIALUL CÎMPULUI ELECTROSTATIC ÎN VID

În general, o funcție scalară de punct $\varphi(x, y, z)$ se numește potențial al unui cîmp de vectori $\bar{G}(x, y, z) = G_x\bar{i} + G_y\bar{j} + G_z\bar{k}$, dacă există relațiile:

$$G_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad G_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad G_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.30}$$

sau restrîns:

$$\bar{G} = -\text{grad}\ \varphi. \tag{1.31}$$

1.5.1. Tensiune electrică. Potențial

Tensiunea electrică este o mărime derivată, definită cu ajutorul vectorului $\bar{E}_v$. Considerînd un cîmp de intensitate $\bar{E}_v$ (fig. 1.9), lucrul mecanic necesar pentru deplasarea sarcinii q între punctele A și B este:

$$L_{AB} = \int_A^B \bar{F} \cdot \overline{\mathrm{d}s}. \tag{1.32}$$

Cu relația (1.3) avem:

$$L_{AB} = q \int_A^B \bar{E}_v \cdot \overline{\mathrm{d}s}. \tag{1.33}$$

Raportul $\frac{L_{AB}}{q}$, notat U_{AB}, se numește tensiune electrică:

$$U_{AB} = \frac{L_{AB}}{q} = \int_A^B \bar{E}_v \cdot \overline{\mathrm{d}s}. \tag{1.34}$$

Deci, *tensiunea electrică între două puncte din cîmp este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele cîmpului pentru deplasarea sarcinii electrice unitare între cele două puncte.* Tensiunea electrică se măsoară în *volt* (V). Un volt este tensiunea între două puncte din cîmp pentru care se cheltuie lucrul mecanic de un joule (J) la deplasarea sarcinii de un coulomb (C) între acele puncte. Relația (1.34) definește și unitatea de măsură a intensității cîmpului electric: *volt pe metru* (V/m).

Din definiție se vede că $U_{AB} = -U_{BA}$, deci tensiunea electrică depinde de sensul de integrare. Acest sens numit sens de referință se indică printr-o săgeată, de exemplu la bornele unui circuit (fig. 1.10).

O proprietate importantă a tensiunii electrice în cîmp electrostatic (invariabil în timp) este aceea că valoarea ei nu depinde de drum, ci numai de extremitățile A, B considerate. Luînd conturul închis $AmBnA$ (fig. 1.11), avem:

$$\oint_\Gamma \bar{E}_v \cdot \overline{\mathrm{d}s} = 0, \tag{1.35}$$

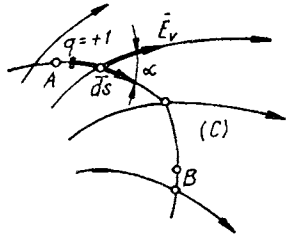


Fig. 1.9.

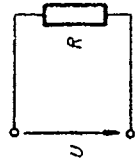


Fig. 1.10.

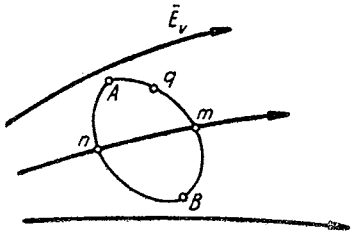


Fig. 1.11.

relație valabilă pentru cîmpuri care derivă dintr-un potențial. Decompunînd conturul Γ pe porțiuni, avem:

$$\int_{AmB} \bar{E}_v \cdot \overline{ds} + \int_{BnA} \bar{E}_v \cdot \overline{ds} = 0, \qquad (1.36)$$

sau:

$$\int_{AmB} \bar{E}_v \cdot \overline{ds} = \int_{AnB} \bar{E}_v \cdot \overline{ds}, \qquad (1.37)$$

deci tensiunea electrică nu depinde de drum.

Dacă alegem în spațiu, în mod arbitrar un punct P, atunci valoarea integralei:

$$\int_A^P \bar{E}_v \cdot \overline{ds} = V_A, \qquad (1.38)$$

se numește *potențialul punctului A*. În mod similar se definesc și potențialele altor puncte din cîmp: $V_B = \int_B^P \bar{E}_v \cdot \overline{ds}$, $V_C = \int_C^P \bar{E}_v \cdot \overline{ds}$ etc. Potențialul, ca și tensiunea, se măsoară în *volt* (V). Potențialul punctului P este zero, deoarece:

$$\int_P^P \bar{E}_v \cdot \overline{ds} = 0. \qquad (1.39)$$

Potențialul electric într-un punct dat al cîmpului electrostatic este deci numeric egal cu lucrul mecanic efectuat de forțele cîmpului pentru deplasarea sarcinii unitare din punctul considerat într-un punct al cărui potențial este zero. Potențialul poate fi determinat numai cu aproximație de o constantă aleasă arbitrar și care depinde de punctul P. În practică, se consideră potențial nul potențialul pămîntului. În unele probleme se consideră cu potențial nul punctele de la infinit.

Din expresia potențialului (1.38) se poate defini tensiunea electrică:

$$U_{AB} = \int_A^B \bar{E}_v \cdot \overline{ds} = \int_A^P \bar{E}_v \cdot \overline{ds} + \int_P^B \bar{E}_v \cdot \overline{ds} = \int_A^P \bar{E}_v \cdot \overline{ds} - \int_B^P \bar{E}_v \cdot \overline{ds} = V_A - V_B, \qquad (1.40)$$

deci tensiunea între două puncte este diferența potențialelor electrice ale celor două puncte din cîmp.

1.5.2. Suprafețe echipotențiale

Suprafețele pentru care toate punctele lor au același potențial se numesc echipotențiale. Ecuația suprafețelor echipotențiale se deduce din condiția:

$$V_A = \int_A^P \bar{E}_v \cdot \overline{\mathrm{d}s} = \text{const.}, \tag{1.41}$$

care prin diferențiere devine:

$$\bar{E}_v \cdot \overline{\mathrm{d}s} = 0. \tag{1.42}$$

Relația (1.42), care reprezintă ecuația diferențială a suprafețelor echipotențiale, ne spune că suprafețele echipotențiale sînt perpendiculare pe liniile de cîmp.

În figura 1.12 sînt reprezentate cîteva exemple. Cu linie plină s-au reprezentat liniile de cîmp, iar cu linii întrerupte suprafețele echipotențiale.

1.5.3. Gradient de potențial

Prin diferențierea relației (1.38) în raport cu limita inferioară, pentru care punctul A are coordonatele variabile x, y și z, se obține:

$$\mathrm{d}V_{(x,y,z)} = -\bar{E}_v \cdot \mathrm{d}\bar{s}. \tag{1.43}$$

Vectorii $\bar{E}_v$ și $\overline{\mathrm{d}s}$ au într-un sistem de axe de coordonate carteziene, expresiile:

$$\bar{E}_v = E_{vx}\bar{i} + E_{vy}\bar{j} + E_{vz}\bar{k} \tag{1.44}$$

$$\overline{\mathrm{d}s} = \mathrm{d}x\bar{i} + \mathrm{d}y\bar{j} + \mathrm{d}z\bar{k}, \tag{1.45}$$

iar diferențiala totală a potențialului este:

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}dz. \tag{1.46}$$

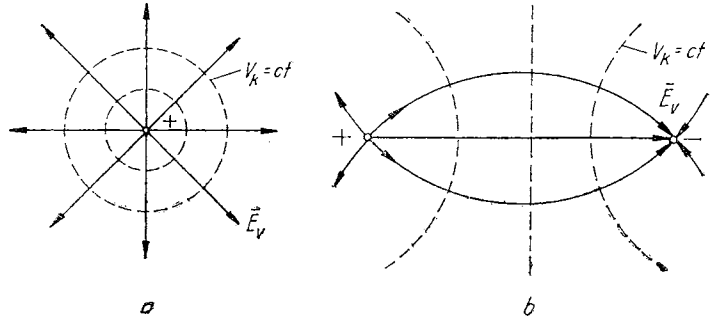


Fig. 1.12.

Introducînd (1.44), (1.45) şi (1.46) în (1.43) se obţine:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = -(E_{vx}dx + E_{vy}dy + E_{vz}dz), \tag{1.47}$$

care conduce la relaţiile:

$$E_{vx} = -\frac{\partial V}{\partial x};\quad E_{vy} = -\frac{\partial V}{\partial y};\quad E_{vz} = -\frac{\partial V}{\partial z}; \tag{1.48}$$

Aceste relaţii determină componentele pe cele trei axe ale cîmpului electric în vid, în funcţie de derivatele parţiale ale potenţialului. Expresia vectorului intensităţii cîmpului electric în vid se obţine din (1.44) şi (1.48):

$$\bar{E}_v = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\bar{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\bar{k}\right). \tag{1.49}$$

Mărimea vectorială din paranteza membrului drept al relaţiei (1.49) se numeşte *gradient de potenţial* şi se notează *grad V*, astfel că (1.49) se scrie prescurtat:

$$\bar{E}_v = -\text{grad}\ V. \tag{1.50}$$

Ca interpretare fizică, gradientul unei funcţii scalare V reprezintă viteza de variaţie maximă a acelei funcţii. În cazul relaţiei (1.50) intensitatea cîmpului electric în vid reprezintă viteza de scădere maximă a potenţialului electric. Direcţia de scădere maximă a potenţialului coincide cu linia de cîmp, care este normală la suprafeţele echipotenţiale (vezi fig. 1.12).

1.6. TEOREMA POTENŢIALULUI CÎMPULUI ELECTRIC COULOMBIAN

Se presupune o sarcină punctiformă q care creează cîmpul electric în vid avînd expresia (1.17):

$$\bar{E}_v = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}\bar{R}.$$

Considerînd punctele de la infinit ($R = \infty$) ca avînd potenţialul nul, potenţialul unui punct situat la distanţa R de sarcina punctiformă va fi:

$$V = \int_R^\infty \bar{E}_v \cdot d\bar{R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}. \tag{1.51}$$

Această integrală s-a efectuat pe direcţia unei linii de cîmp care este radială (vezi spectrul cîmpului din figura 1.5) şi ca atare elementul de arc $d\bar{s}$ devine $d\bar{R}$, iar produsul scalar $\bar{E}_v \cdot d\bar{R}$ devine produsul modulelor $E_v dR$ (deoarece vectorii $\bar{E}_v$ şi $d\bar{R}$ sînt coliniari şi au acelaşi sens în cazul sarcinii pozitive).

Potențialul produs de mai multe sarcini punctiforme q_k într-un punct aflat la distanțele R_k de aceste sarcini se va calcula prin suprapunerea efectelor cu formula:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{1}{R_k}. \tag{1.52}$$

În cazul general cînd există sarcini distribuite în volum (cu densitatea de volum ρ_v), pe suprafețe (cu densitatea de suprafață ρ_s) sau pe arce de curbă (cu densitatea de linie ρ_l), cît și sarcini punctiforme q_k, potențialul se va calcula cu formula:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int_V \frac{\rho_v \mathrm{d}V}{R} + \int_A \frac{\rho_s \mathrm{d}A}{R} + \int_C \frac{\rho_l \mathrm{d}s}{R} + \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{R_k} \right). \tag{1.53}$$

Această relație determină potențialul cîmpului electrostatic în vid, definit pînă la o constantă arbitrară care poate fi aleasă nulă prin convenție. După cum am amintit mai sus, se alege pămîntul cu potențial nul, iar în calcule se aleg punctele de la infinit ca avînd potențial nul. Această din urmă alegere nu este valabilă decît pentru sarcini care se află pe corpuri cu dimensiuni finite. Subliniem că relația (1.53) impune obligatoriu $V(\infty) = 0$, deci se aplică numai pentru corpuri cu dimensiuni finite.

Observații și precizări:

a) Din relația potențialului (1.53) se poate deduce apoi cîmpul ($\bar{E}_v = -\operatorname{grad} V$), deoarece uneori este mai ușor de calculat potențialul care e o mărime scalară.

b) Cu ajutorul potențialului se pot preciza unele proprietăți geometrice ale cîmpului, astfel:

— suprafețele echipotențiale sînt perpendiculare pe liniile de cîmp;

— potențialul unui conductor omogen în regim electrostatic este constant deoarece $\bar{E}_v \cdot \mathrm{d}\bar{s} = -\mathrm{d}V = 0$, căci $\bar{E}_v = 0$ în interiorul conductorului. Dacă în conductor (caracterizat prin sarcini libere) am avea $E_v \neq 0$, atunci sarcinile ar fi puse în mișcare și nu ar mai putea fi vorba de regim electrostatic;

— dacă se ia $\bar{E}_v \parallel \mathrm{d}\bar{s}$, avem $\mathrm{d}V = -E_v \cdot \mathrm{d}s$, deci potențialul scade în sensul liniilor de cîmp;

— cu relația $|E_v| = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}$, rezultă că vectorul cîmp este mai intens cu cît suprafețele echipotențiale sînt mai dense (fig. 1.13).

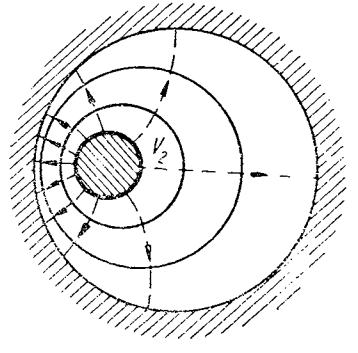


Fig. 1.13.

1.7.1. Cîmpul și potențialul produs în vid de o sferă metalică, încărcată uniform, cu densitatea de sarcină ρ_s

Pentru calculul cîmpului în exteriorul sferei $\bar{E}_{ve}$ se consideră o suprafață închisă sferică de rază $r > a$ (fig. 1.14), concentrică cu sfera conductoare. Din motive de simetrie, liniile de cîmp sînt radiale și intensitatea cîmpului electric este constantă în orice punct de pe suprafața sferei de rază r, ca urmare, aplicînd teorema lui Gauss (1.26) se obține:

$$\oint_{\Sigma} \bar{E}_{ve} \cdot d\bar{A} = 4\pi r^2 E_{ve} = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi a^2 \cdot \rho_s, \tag{1.54}$$

de unde rezultă:

$$E_{ve} = \frac{a^2 \rho_s}{\varepsilon_0 r^2}. \tag{1.55}$$

Sarcina electrică aflată pe sfera metalică de rază a fiind $q = 4\pi a^2 \rho_s$, expresia cîmpului (1.55) se poate pune și sub forma:

$$E_{ve} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{1.56}$$

sau vectorial:

$$\bar{E}_{ve} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \bar{r}. \tag{1.57}$$

Relația (1.57) arată că o sferă metalică încărcată cu sarcină produce în exteriorul său un cîmp identic cu al unei sarcini punctiforme (de aceeași valoare) aflată în centrul sferei.

Cîmpul electric din interiorul sferei metalice $\bar{E}_{vi}$ este zero.

Potențialul unui punct din exteriorul sferei (aflat la raza $r > a$) se determină cu relația (1.38), în care se alege punctul de la infinit ca avînd potențial nul:

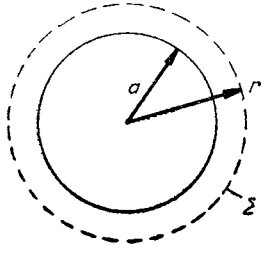


Fig. 1.14.

$$V_e = \int_r^{\infty} \bar{E}_{ve} \cdot d\bar{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}. \tag{1.58}$$

În interiorul sferei metalice potențialul este constant și egal cu cel de la periferia sferei ($r = a$):

$$V_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}. \tag{1.59}$$

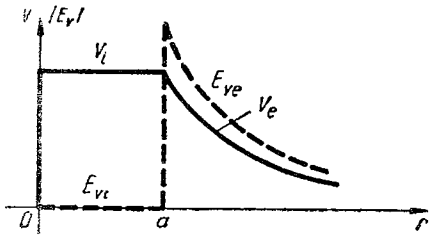


Fig. 1.15.

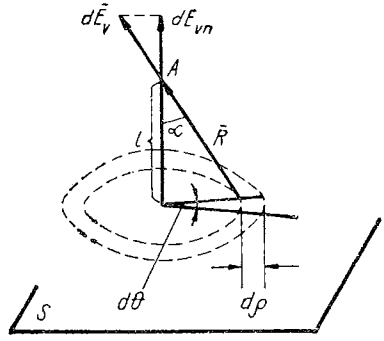


Fig. 1.16.

În figura 1.15 se reprezintă variația cîmpului și potențialului în funcție de raza r atît pentru punctele situate în exteriorul cît și în interiorul sferei metalice.

1.7.2. Cîmpul și potențialul produs de un plan infinit, încărcat uniform, cu densitatea superficială ρ_s

Se consideră un element de arie în plan (fig. 1.16), avînd în coordonate polare expresia:

$$\mathrm{d}A = \rho \cdot \mathrm{d}\rho \cdot \mathrm{d}\theta.$$

Cîmpul produs în punctul A de sarcina distribuită superficial este (relația 1.20):

$$\mathrm{d}\bar{E}_v = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho_s \frac{\bar{R}}{R^3} \cdot \mathrm{d}A. \tag{1.60}$$

Din cauza simetriei, cîmpul nu poate avea decît componente după normala la plan, deci interesează numai componenta normală

$$\mathrm{d}E_{vn} = \mathrm{d}E_v \cdot \cos\alpha. \tag{1.61}$$

Înlocuind în (1.60) valoarea lui $\mathrm{d}A$ și cu (1.61) rezultă:

$$E_{vn} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho_s \frac{1}{R^2} \cos\alpha \cdot \rho \cdot \mathrm{d}\rho \cdot d\theta. \tag{1.62}$$

Din considerente geometrice se scriu relațiile:

$$\rho = l \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{apoi} \quad \mathrm{d}\rho = \frac{l}{\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha \quad \text{și} \quad \frac{l}{R} = \cos\alpha,$$

care înlocuite în (1.62) conduc la:

$$E_{vn} = \frac{\rho_s}{4\varepsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\alpha \cdot \mathrm{d}\alpha = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}. \tag{1.63}$$

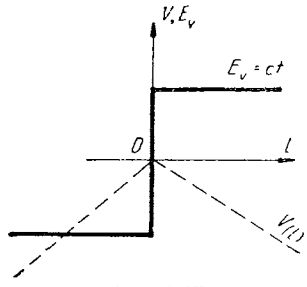


Fig. 1.17

Relația (1.63) arată că intensitatea cîmpului electrostatic produs în vid de un plan infinit, încărcat superficial, este dirijată normal la plan și nu depinde de distanța la care se calculează cîmpul.

Potențialul unui punct va fi:

$$V_B = \int_A^P \bar{E}_v \cdot \overline{ds} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \int_A^P ds. \qquad (1.64)$$

Se alege punctul P de potențial nul chiar înplan și rezultă:

$$V_A = -\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} l. \qquad (1.65)$$

În figura 1.17 se reprezintă variația cîmpului și potențialului în funcție de distanța l de la punctul considerat la plan.

Observație

În cazul a două plane paralele infinite, încărcate cu sarcini opuse, adică $q_1 = -q_2 = q$, (acestea formează un condensator plan), cîmpul în interiorul și exteriorul planelor se calculează prin superpoziție (fig. 1.18).

Se consideră întîi situația separată a celor două plane încărcate superificial cu densitățile $+\rho_s$ și $-\rho_s$. Acestea produc un cîmp de valoare $E_v = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$ și dirijat, pentru planu pozitiv, de la plan spre exterior, iar pentru cel negativ din exterior către plan (fig. 1.18, *a*). Suprapunînd cîmpurile produse de cele două plane (fig. 1.18, *b*), rezultă că în exteriorul lor avem $E_v = 0$, iar în interior avem:

$$E_v = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}. \qquad (1.66)$$

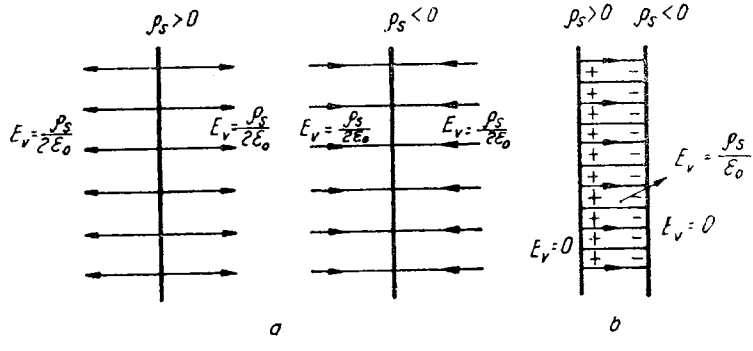


Fig. 1.18

1.7.3. Cîmpul și potențialul în cazul unui conductor filiform infinit de lung, încărcat uniform

Se consideră în figura 1.19, un conductor filiform încărcat cu densitatea de linie ρ_l. Se aplică teorema lui Gauss considerînd ca suprafață închisă Σ suprafața totală a unui cilindru circular drept, a cărui axă coincide cu axa conductorului filiform. Datorită simetriei cilindrice a cîmpului produs, prin suprafețele bazelor nu vom avea flux deoarece $\bar{E}_v \parallel \bar{S}_1$.

Fluxul va fi dat numai de suprafața laterală S_l, pentru care $\bar{E}_v \perp \bar{S}_l$, deci:

$$\int_{S_l} \bar{E}_v \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{1.67}$$

Dacă cilindrul are raza r și generatoarea l, relația (1.67) conduce la rezultatul:

$$E_v = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}. \tag{1.68}$$

Potențialul va fi:

$$V = \int_{r}^{r_0} \bar{E}_v \cdot \overline{\mathrm{d}s} = \int_{r}^{r_0} \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r}, \tag{1.69}$$

dacă se consideră un drum de integrare după direcția radială unde $\overline{\mathrm{d}s} = \overline{\mathrm{d}r}$.

Integrînd relația (1.69) se obține:

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}, \tag{1.70}$$

unde r_0 este raza la care se consideră originea de potențial.

Dacă se alege raza r_0 egală cu unitatea, potențialul devine:

$$V = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln r, \tag{1.71}$$

numit potențial logaritmic.

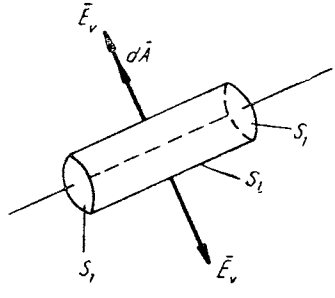


Fig. 1.19

1.7.4. Cîmpul și potențialul produs de două conductoare filiforme, paralele, infinit lungi, încărcate cu sarcini opuse ($q_1 = -q_2 = q$)

Se consideră conductoarele *1* și *2* reprezentate în figura 1.20 și un punct A, de coordonate x, y, situat la distanța r_1, respectiv r_2 de cele două conductoare. Distanța între conductoare este $2a$. Potențialul produs de fiecare dintre cele două conductoare în punctul A (relația 1.70) este:

$$V_1 = \frac{\rho l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_1}, \tag{1.72}$$

$$V_2 = -\frac{\rho l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_2}. \tag{1.73}$$

Potențialul rezultant în punctul A va fi:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\rho l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{1.74}$$

Pentru $r_2 = r_1$ (axa Oy) rezultă $V = 0$ (originea de potențial). Suprafețele echipotențiale ($V = \text{const.}$) sînt date de:

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{const.} = c. \tag{1.75}$$

Din considerente geometrice se poate scrie:

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = c. \tag{1.76}$$

Ridicînd la pătrat relația (1.76) și ordonînd convenabil termenii, se obține:

$$\left(x - a\,\frac{c^2+1}{c^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ac}{c^2-1}\right)^2. \tag{1.77}$$

Aceasta este ecuația suprafețelor echipotențiale. Ele reprezintă în spațiu niște cilindri care au centrul pe axa Ox, de abscisă $a\,\frac{c^2+1}{c^2-1}$, iar raza este egală cu $\frac{2ac}{c^2-1}$.

În figura 1.20 sînt reprezentate cu linie întreruptă suprafețele echipotențiale. De remarcat că întotdeauna axele cilindrilor echipotențiali se află în exteriorul axelor conductoarelor filiforme.

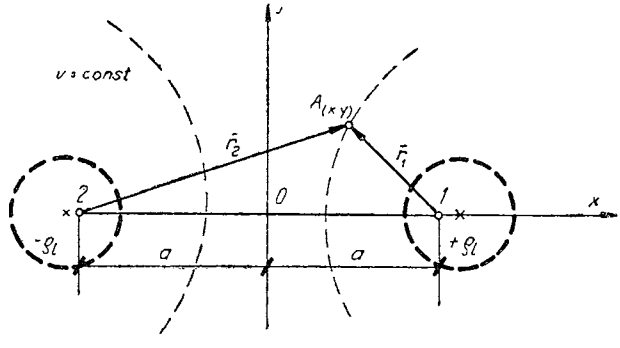


Fig. 1.20.

CÎMPUL ELECTRIC ÎN SUBSTANȚĂ

2.1. POLARIZARE ELECTRICĂ TEMPORARĂ ȘI PERMANENTĂ

Materialele, din punct de vedere al proprietăților electrice, se împart în trei categorii: izolante (dielectrici), semiconductoare și conductoare.

Împărțirea în aceste categorii se face practic în funcție de rezistivitatea lor (rezistența electrică măsurată între două fețe opuse ale unui cub cu latura unitate). Dielectricii au această rezistivitate de ordinul $10^6 \div 10^{15}\Omega$m, conductoarele de ordinul $10^{-7}\ \Omega \cdot$ m, iar semiconductoarele $10^{-4} \div 10^{+4}\ \Omega \cdot$ m.

Substanțele conductoare sînt caracterizate prin aceea că posedă sarcini electrice libere (electroni în metale, ioni în electroliți), iar sub acțiunea unui cîmp electric exterior ele se pot deplasa liber, dînd naștere unui curent electric de conducție.

Substanțele dielectrice nu au sarcini libere, ci „sarcini legate" formînd un dipol electric. Acești dipoli se orientează în cîmp electric, iar acest fenomen de orientare a dipolilor se numește *polarizare electrică.*

Există două categorii deosebite de materiale dielectrice și anume: materiale polarizabile temporar și materiale polarizate permanent.

Polarizarea temporară se produce numai sub influența unui cîmp electric exterior și ea dispare odată cu dispariția acestui cîmp. Polarizarea temporară poate fi la rîndul său de două feluri: de orientare și de deformare.

Polarizarea temporară de orientare se produce în dielectricii care au molecule sub forma unui dipol electric, adică centrul de acțiune al sarcinii pozitive nu coincide cu centrul de acțiune al sarcinii negative (de exemplu molecula de acid clorhidric). Dacă sarcinile au valorile $+q$ și $-q$, iar distanța dintre centrele lor este $\overline{l}$, produsul

$$q \cdot \overline{l} = \overline{p}, \tag{2.1}$$

se numește momentul electric al dipolului sau prescurtat *momentul dipolului* și are sensul dirijat de la sarcina negativă la cea pozitivă (fig. 2.1).

În cîmp electric exterior, acești dipoli se orientează cu sarcina pozitivă în direcția cîmpului, iar sarcina negativă în sens contrar cîmpului exterior. Agitația termică împiedică această orientare. Orientarea va fi cu atît mai puternică cu cît cîmpul exterior va fi mai intens.

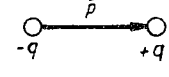


Fig. 2.1

În cazul *polarizației temporare de deformare,* atomul sau molecula se deformează sub acțiunea cîmpului exte-

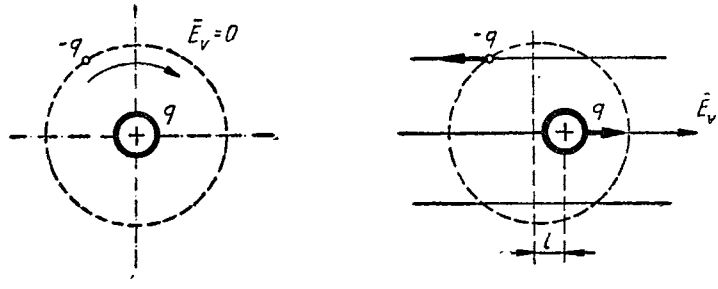


Fig.2 2.2.

rior. Ca exemplu se consideră atomul de hidrogen (fig. 2.2) constituit dintr-un nucleu cu sarcină pozitivă în jurul căruia gravitează electronul cu sarcină negativă.

Dacă la un cîmp $\bar{E}_v = 0$ centrul de acţiune al sarcinii negative coincide cu centrul sarcinii pozitive (fig. 2.2, *a*), la un cîmp $\bar{E}_v \neq 0$ centrele lor de acţiune nu mai coincid (fig. 2.2, *b*) şi atomul se vede din exterior ca un dipol, al cărui moment electric este $\bar{p} = q \cdot \bar{l}$. Se constată că deformarea (distanţa $\bar{l}$) este proporţională cu intensitatea cîmpului. La dispariţia cîmpului deformarea dispare.

Polarizarea electrică permanentă nu depinde de valoarea locală a intensităţii cîmpului electric şi ea poate fi de mai multe categorii: polarizare piezoelectrică (de deformare), polarizare piroelectrică (de încălzire), polarizare permanentă a electreţilor sau polarizare remanentă a substanţelor feroelectrice care au atît polarizare temporară cît şi permanentă (sarea Seignette, titanat de Ba etc.).

2.2. DIPOLUL ÎN CÎMP ELECTRIC

Dacă un mic corp polarizat electric (echivalent cu un dipol) este introdus într-un cîmp de valoare $\bar{E}_v$ (neomogen), se constată că asupra corpului acţionează un cuplu $\bar{C}$ şi o forţă $\bar{F}$ (fig. 2.3).

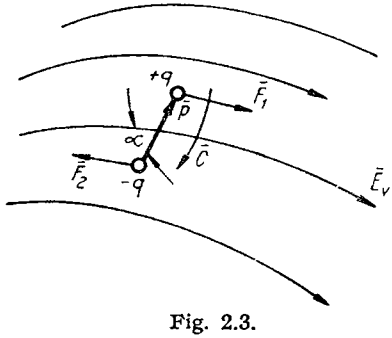


Fig. 2.3.

Forţa rezultantă care acţionează asupra micului corp polarizat este:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 - \bar{F}_2, \tag{2.2}$$

care cu relaţia (1.3) devine:

$$\bar{F} = q(\bar{E}_{v1} - \bar{E}_{v2}). \tag{2.3}$$

În cîmpuri omogene ($\bar{E}_{v1} = \bar{E}_{v2}$) forţa este nulă. În cîmpuri neomogene ($\bar{E}_{v1} \neq \bar{E}_{v2}$),

ţinînd cont de expresia momentului dipolului ($\bar{p} = q \cdot \bar{l}$), relaţia (2.3) capătă în general forma:

$$\bar{F} = \left(\bar{p}\frac{\partial \bar{E}_v}{\partial x}\right)\bar{i} + \left(\bar{p}\frac{\partial \bar{E}_v}{\partial y}\right)\bar{j} + \left(\bar{p}\frac{\partial \bar{E}_v}{\partial z}\right)\bar{k}. \tag{2.4}$$

Cuplul care acţionează asupra corpului polarizat aflat într-un cîmp omogen ($\bar{F}_1 = \bar{F}_2$) este:

$$C = l \cdot F \cdot \sin \alpha, \tag{2.5}$$

sau

$$C = l \cdot q \cdot E_v \cdot \sin \alpha = p \cdot E_v \cdot \sin \alpha, \tag{2.6}$$

În general cuplul este dat de produsul vectorial:

$$\bar{C} = \bar{p} \times \bar{E}_v. \tag{2.7}$$

Acest cuplu are tendinţa de a roti dipolul astfel încît sarcina pozitivă se deplasează în sensul cîmpului, iar sarcina negativă în sens contrar cîmpului.

2.3. POLARIZAŢIE. SARCINI DE POLARIZAŢIE

Pentru a caracteriza starea locală a corpurilor masive polarizate (care conţin dipoli) se utilizează o mărime vectorială $\bar{P}$, care este densitatea de volum a dipolilor, numită *polarizaţie* sau *intensitatea de polarizare*, definită deci prin relaţia

$$\bar{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Sigma \bar{p}_i}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}V}, \tag{2.8}$$

unde $\Sigma \bar{p}_i$ reprezintă suma vectorială a momentelor electrice ale dipolilor cuprinşi în elementul de volum ΔV. Această limită se ia pentru cazul cînd ΔV se restrînge la un punct.

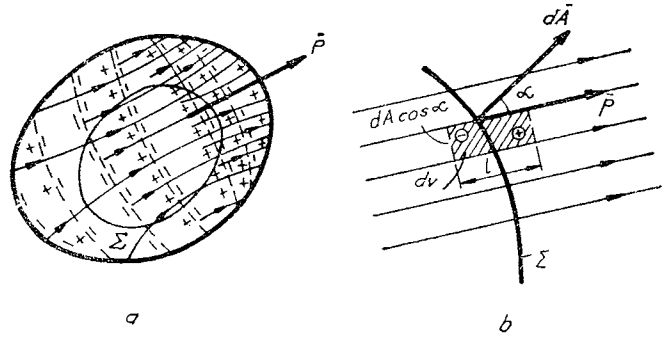
Se consideră volumul unui corp polarizat (fig. 2.4, *a*) pe care îl împărţim în elemente de volum, care pot fi considerate ca fiind nişte dipoli. Considerînd o suprafaţă închisă Σ, ea va avea exces de sarcini (la noi negative). Acest exces este determinat numai de frontieră, care intersectează dipolii, deoarece sarcinile dipolilor din interior au suma nulă.

Pentru un element de volum (fig. 2.4, *b*) sarcina cuprinsă în interiorul suprafeţei Σ este $-\mathrm{d}q_p$. Din (2.1) şi (2.8) rezultă:

$$-\mathrm{d}q_p = \frac{P \cdot \mathrm{d}V}{l} = \frac{P \cdot \mathrm{d}A \cos \alpha \cdot l}{l} = P \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos \alpha, \tag{2.9}$$

sau:

$$-\mathrm{d}q_p = \bar{P} \cdot \overline{\mathrm{d}A}. \tag{2.10}$$



a b

Fig. 2.4.

Prin integrarea relației (2.10) rezultă:

$$q_{p\Sigma} = -\oint_{\Sigma} \overline{P} \cdot \overline{dA}. \tag{2.11}$$

Aceasta este sarcina de polarizație din interiorul suprafeței Σ.

Sarcina care se află în exteriorul suprafeței este:

$$q'_{p\Sigma} = -q_{p\Sigma} = \oint_{\Sigma} \overline{P} \cdot \overline{dA}. \tag{2.12}$$

Dacă se introduce noțiunea de densitate superficială a sarcinii de polarizație, se obține:

$$\rho_{sp} = \frac{dq'_p}{dA} = \overline{P} \cdot \overline{n}. \tag{2.13}$$

(n este versorul normal la suprafață dirijat în sensul cîmpului polarizant).

Relația (2.13) arată că vectorul polarizație $\overline{P}$ este numeric egal cu densitatea superficială a sarcinii de polarizație ρ_{sp}. Această relație ne permite să stabilim și unitatea de măsură pentru polarizația $\overline{P}$: coulomb pe metru pătrat (C/m²).

2.4. INTENSITATEA CÎMPULUI ELECTRIC ÎN INTERIORUL CORPURILOR POLARIZATE. INDUCȚIA ELECTRICĂ

Pînă acum (cap. 1) s-a definit numai intensitatea cîmpului electric în vid $\overline{E}_v$, prin relația

$$\overline{E}_v = \lim_{q \to 0} \frac{\overline{F}}{q}, \tag{2.14}$$

unde $\overline{F}$ este forța care se exercită asupra unui mic corp de probă încărcat cu o sarcină q. Această definiție se poate extinde și în cazul corpurilor polarizate.

Dacă în interiorul corpurilor polarizate (fig. 2.5, *a*) se consideră o cavitate vidă (delimitată de o suprafață închisă Σ_c) în jurul punctului M, este posibil să se măsoare forța ce se exercită asupra corpului de probă și să se definească intensitatea cîmpului electric din cavitate (suprafața Σ_c se restrînge la un punct) cu relația

$$\bar{E}_{cav} = \lim_{\substack{q\to 0 \\ \Sigma_c \to M}} \frac{\bar{F}}{q}. \tag{2.15}$$

Se constată însă că această mărime ($\bar{E}_{cav}$) depinde de forma cavității Σ_c, oricît de mică ar fi ea, iar cîmpul electric din cavitate se poate scrie sub forma

$$\bar{E}_{cav} = \bar{E}' + \bar{E}'_{p\,cav}, \tag{2.16}$$

unde $\bar{E}'$ este „cîmpul de calcul" existent în corpul polarizat înainte de practicarea cavității vide (cîmp care poate fi calculat prin suprapunerea efectelor, vezi par. 1.3, considerînd atît contribuția sarcinilor libere, cît și a celor de polarizație), iar $\bar{E}'_{p\,cav}$ este cîmpul produs de sarcinile superficiale de polarizație de pe suprafața Σ_c.

Pentru a defini cîmpul electric în substanță, conform relațiilor (2.15) și (2.16), este necesar a practica o cavitate în așa fel încît contribuția sarcinilor de polarizație de pe suprafața Σ_c să fie nulă la producerea cîmpului, deci să avem $\bar{E}'_{p\,cav} = 0$. Această cavitate se ia sub forma unui canal cilindric foarte lung și cu raza foarte mică, axul canalului fiind după direcția vectorului polarizație $\bar{P}$ (fig. 2.5, *b*). În această situație, contribuția sarcinilor de polarizare de pe bazele cilindrului sînt neglijabile deoarece ariile acestora sînt inifiniți mici de ordinul doi, iar densitatea sarcinii de polari-

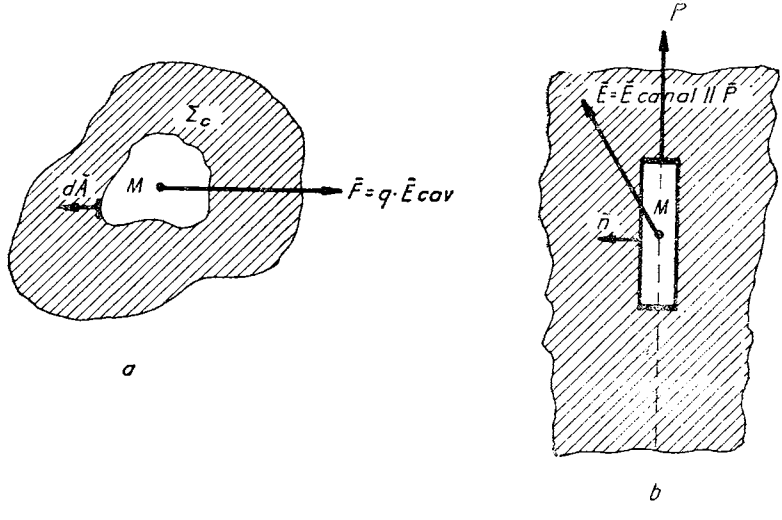


Fig. 2.5.

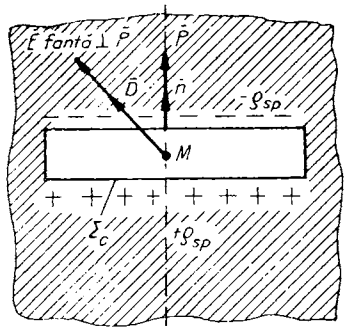


Fig. 2.6

zație de pe aria laterală este zero, deoarece aici (rel. 2.13) vectorii $\bar{P}$ și $\bar{n}$ sînt perpendiculari. Rezultă $\bar{E}'_{p\,cav} = 0$ și cîmpul din canal devine egal cu cîmpul de calcul (rel. 1.16).

Cu aceste precizări, se *definește intensitatea cîmpului electric* $\bar{E}$ într-un punct din substanță ca fiind egală cu intensitatea cîmpului electric din vidul unui mic canal extrem de subțire orientat în lungul direcției locale a vectorului polarizație $\bar{P}$:

$$\bar{E} = \bar{E}' = \bar{E}_{canal \parallel \bar{P}}. \tag{2.17}$$

O mărime derivată, definită cu ajutorul vectorului intensitate cîmp electric $\bar{E}$, este tensiunea electrică între două puncte A și B:

$$U_{AB} = \int_A^B \bar{E} \cdot \bar{ds}, \tag{2.18}$$

care generalizează definiția dată în vid $\left(U_{AB} = \int_A^B \bar{E}_v \cdot \bar{ds}\right)$.

În situația în care se practică în substanța polarizată o cavitate vidă de forma unui cilindru foarte plat (înălțimea sa mult mai mică decît raza bazei) numit fantă, orientată cu fețele bazelor perpendicular pe direcția vectorului $\bar{P}$ (fig. 2.6), se definește în vidul acestei fante o mărime numită inducție electrică $\bar{D}$. *Se numește inducție electrică* $\bar{D}$ mărimea de stare a cîmpului electric numeric egală cu produsul dintre permitivitatea vidului ε_0 și vectorul cîmp $\bar{E}_{fantă \perp \bar{P}}$ din vidul unei fante foarte mici orientată transversal față de direcția locală a polarizației $\bar{P}$:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \cdot \bar{E}_{fantă \perp \bar{P}}. \tag{2.19}$$

În cazul acestei cavități, apare pe fețele interioare ale cavității sarcina de polarizație cu densitatea superficială $\rho_{sp} = \bar{P} \cdot \bar{n}$ (vezi rel. 2.13). Din punctul de vedere al cîmpului produs de sarcinile de polarizație, perturbația introdusă prin practicarea acestei fante este maximă. Această fantă poate fi privită ca un condensator plan, pentru care (vezi fig. 1.18 și rel. 1.66) cîmpul în exterior este zero, iar în interiorul fantei „cîmpul de calcul" este:

$$\bar{E}'_{p\,fantă \perp \bar{P}} = \bar{n} \frac{\rho_{sp}}{\varepsilon_0} = \frac{\bar{P}}{\varepsilon_0}, \tag{2.20}$$

Introducînd (2.19) și (2.20) în (2.16), se obține:

$$\frac{\bar{D}}{\varepsilon_0} = \bar{E}_{fantă \perp \bar{P}} = \bar{E}' + \frac{\bar{P}}{\varepsilon_0}. \tag{2.21}$$

Relaţiile (2.17) şi (2.21) definite în substanţă prin practicarea unor cavităţi vide în jurul unui punct, avînd formele particulare din figurile 2.5, *b* şi 2.6, permit determinarea valorii locale a cîmpului electric din cavitate $\bar{E}_{cav}$ pentru orice formă a cavităţii. De aceea, caracterizarea stării locale a cîmpului electric în substanţa polarizată se poate face complet numai cu ajutorul a două mărimi vectoriale de stare: *intensitatea cîmpului electric* $\bar{E}$ *şi inducţia electrică* $\bar{D}$. Inducţia electrică $\bar{D}$ se mai numeşte şi *deplasare electrică.*

Din (2.21) rezultă unitatea de măsură a inducţiei electrice (aceeaşi ca şi a polarizaţiei $\bar{P}$): coulomb pe metru pătrat (C/m²).

O mărime derivată, exprimabilă cu ajutorul inducţiei electrice, este *fluxul electric* ψ definit prin integrala de suprafaţă

$$\psi_S = \int_S \bar{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A}, \tag{2.22}$$

şi care se măsoară în coulomb (C).

2.5. UNELE LEGI GENERALE ŞI DE MATERIAL. PARTICULARIZĂRI

Electrostatica cuprinde studiul stărilor electrice invariabile în timp. Pentru a caracteriza macroscopic *starea electrostatică a corpurilor* sînt necesare două mărimi primitive: sarcina electrică q şi momentul electric $\bar{p}$. Pentru a caracteriza macroscopic *starea locală a cîmpului electrostatic în substanţă* sînt necesare două mărimi: intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ şi inducţia electrică $\bar{D}$, introduse în studiu cu ajutorul mărimii primitive $\bar{E}_v$ (intensitatea cîmpului electric în vid).

Între mărimile de stare ale corpurilor şi mărimile de stare ale cîmpului electrostatic există relaţii de legătură, care devin axiome şi sînt verificate de experienţă în cazul cel mai general (regimul variabil). Aceste relaţii de legătură (legi) sînt: legea polarizaţiei temporare; legea legăturii dintre vectorii $\bar{D}$, $\bar{E}$ şi $\bar{P}$; legea fluxului electric.

2.5.1. Legea polarizaţiei temporare

Din interpretarea microscopică a polarizaţiei electrice (par. 2.1) rezultă că numai polarizaţia temporară poate fi exprimată în funcţie de intensitatea cîmpului electric. Se constată experimental că în medii dielectrice liniare şi izotrope există o relaţie de proporţionalitate între polarizaţie şi intensitatea cîmpului electric:

$$\bar{P}_t = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \bar{E}, \tag{2.23}$$

relaţie numită *legea polarizaţiei temporare.*

Aceasta este o lege de material, deoarece intervine constanta de material χ_e, numită *susceptivitate* (mărime adimensională, pozitivă), dependentă de natura materialului.

În medii *neliniare*, χ_e depinde şi de intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$.

În medii *neomogene*, χ_e are valori diferite în diferite puncte de pe o anumită direcție.

În medii *anizotrope*, χ_e are într-un punct din material valori diferite în funcție de direcția cîmpului $\bar{E}$. Rezultă că în medii anizotrope vectorii $\bar{E}$ și $\bar{P}$ nu mai sînt coliniari și deci χ_e capătă calitatea de tensor ($\bar{P}_t = \varepsilon_0 \cdot \overline{\overline{\chi_e}} \cdot \bar{E}$).

2.5.2. Legea legăturii între vectorii $\bar{D}$, $\bar{E}$ și $\bar{P}$

Suma vectorială dintre polarizația $\bar{P}$ și intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ multiplicată cu permitivitatea vidului ε_0 este egală în orice moment și în orice punct cu inducția electrică $\bar{D}$:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}. \tag{2.24}$$

Această lege rezultă, în cazuri particulare, din (2.17) și (2.21), dar ea este o lege generală, verificată experimental în cazul regimului nestaționar.

În practică această lege, pentru materiale fără polarizație permanentă ($\bar{P} = \bar{P}_t$; $\bar{P}_p = 0$), combinată cu (2.23) conduce la relația

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}_t = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\bar{E} = \varepsilon \bar{E}, \tag{2.25}$$

în care ε este o mărime de material numită *permitivitate*, dependentă de natura materialului, de temperatură etc. și se măsoară ca și ε_0 în farad pe metru (F/m). Mărimea

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e \tag{2.26}$$

(reamintim valoarea constantei universale $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ farad/metru numită permitivitatea vidului), se numește *permitivitate relativă* sau constantă dielectrică a materialului. În tabelul 2.1 se dau permitivitățile relative pentru cîteva materiale dielectrice, la 20 °C și 760 torr.

În general, permitivitatea relativă (mărime adimensională) pentru majoritatea materialelor dielectrice este cuprinsă între $1 \div 10$.

Tabelul 2.1

Materialul	ε_r	Materialul	ε_r
Aer	1,0006	Marmură	8 ÷ 10
Apă distilată	81	Mică	4,5 ÷ 7,5
Bachelită	4,5÷5,5	Parafină	1,9÷2,3
Cauciuc	3 ÷6	Preșpan	3÷5
Clorură de polivinil	3,4	Pertinax	3,5÷7
Diamant	5,7	Polistiren	2,5
Izolația cablurilor telefonice	1,5÷2	Porțelan	5,5÷6
Izolația cablurilor electrice	3 ÷4,3	Sticlă	3,4÷6
		Ulei de transformator	2,2÷2,5

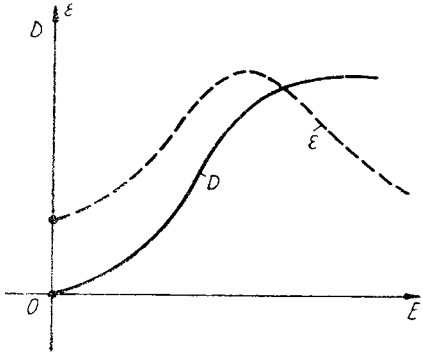


Fig. 2.7.

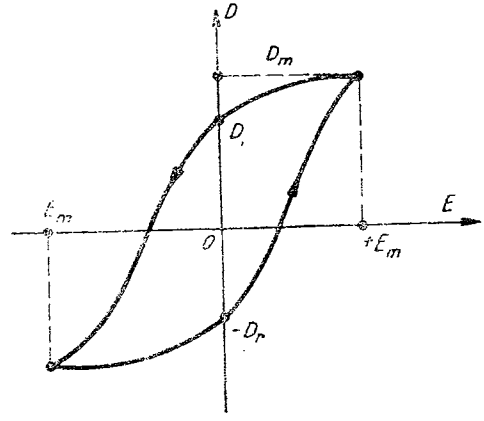


Fig. 2.8.

Există însă o categorie de materiale, numite *feroelectrice* (sarea Seignette, titanatul de bariu etc.), care în anumite condiţii de cîmp şi de temperatură au permitivităţi relative de ordinul miilor sau zecilor de mii. În cristalele sării Seignette, polarizarea intensă se observă în special în direcţia uneia din axele sale cristalografice, deci sarea Seignette este un material anizotrop. În plus, materialele feroelectrice sînt neliniare (permitivitatea depinde foarte mult de intensitatea cîmpului electric) şi prezintă histerezis.

Dacă se trasează grafic variaţia inducţiei electrice în funcţie de intensitatea cîmpului electric, pentru un material feroelectric care nu a mai fost polarizat, se obţine caracteristica neliniară $D=f(E)$ din figura 2.7, numită caracteristică de primă polarizare, din care se poate determina şi permitivitatea $\varepsilon = \frac{D}{E}$.

În cazul unei variaţii periodice a intensităţii cîmpului electric, între limitele $+E_m$ şi $-E_m$, se pune în evidenţă fenomenul de *histerezis electric*, cînd caracteristica $D = f(E)$ nu coincide la descreşterea cîmpului electric cu caracteristica corespunzătoare creşterii cîmpului electric (fig. 2.8). Din acest grafic se mai evidenţiază şi prezenţa unei polarizaţii permanente corespunzătoare inducţiei remanente D_r (obţinută pentru $E = 0$).

2.5.3. Legea fluxului electric

Fluxul electric (rel. 2.22) printr-o suprafaţă închisă este egal cu sarcina electrică aflată în interiorul acelei suprafeţe:

$$\psi_\Sigma = \oint_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = q_\Sigma. \qquad (2.27)$$

Această relaţie reprezintă forma integrală a legii fluxului electric. Normala la suprafaţa Σ se consideră orientată spre exterior, astfel încît pentru sarcini pozitive fluxul este pozitiv (liniile lui $\overline{D}$ ies din suprafaţă),

iar pentru sarcini negative fluxul este negativ (liniile lui $\overline{D}$ intră în suprafaţa Σ).

Această lege (rel. 2.27) este verificată experimental în cazul cel mai general al regimului nestaţionar; ea este o lege generală.

În particular (în electrostatică) legea fluxului electric este o generalizare a teoremei lui Gauss. Dacă se consideră cîmpul electric produs atît de sarcini electrice q_Σ (libere), cît şi de sarcini electrice de polarizaţie $q_{p\Sigma}$, teorema lui Gauss (rel. 1.26) ia forma

$$\oint_\Sigma \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_\Sigma + q_{p\Sigma}), \tag{2.28}$$

care cu (2.12) se scrie:

$$\oint_\Sigma (\varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}) \cdot \overline{\mathrm{d}A} = q_\Sigma \tag{2.29}$$

Conform (2.24) se obţine:

$$\oint_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = q_\Sigma, \tag{2.30}$$

ceea ce reprezintă legea fluxului electric, unde q_Σ este numai *sarcina electrică* (liberă) din interiorul suprafeţei Σ.

Relaţia (2.30) permite să interpretăm inducţia electrică ca şi o densitate de suprafaţă a sarcinii electrice (libere), prin analogie cu (2.13), care interpretează polarizaţia $\overline{P}$ ca o densitate de suprafaţă a sarcinilor de polarizaţie (legate).

Cu (2.25) se obţine din (2.30) relaţia

$$\oint_\Sigma \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon}, \tag{2.31}$$

care în vid capătă forma (1.26):

$$\oint_\Sigma \overline{E}_v \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}.$$

Deoarece $\varepsilon > \varepsilon_0$ (vezi şi tabelul 2.1) rezultă că intensitatea cîmpului electric în vid $\overline{E}_v$ este mai mare decît intensitatea cîmpului în substanţă $\overline{E}$. Acest lucru se explică prin apariţia pe suprafaţa corpurilor încărcate, cu sarcini, a unor sarcini de polarizaţie ale mediului, care „neutralizează" parţial sarcinile proprii ale corpului (fig. 2.9).

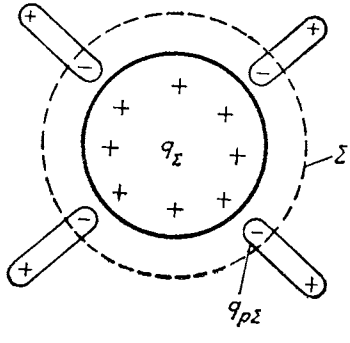


Fig. 2.9.

Forma locală a legii fluxului electric se obţine din (2.30), raportînd atît membrul întîi cît şi membrul al doilea al acestei relaţii la volumul V_Σ (mărginit de suprafaţa închisă Σ) şi trecînd apoi la limită:

$$\lim_{V_\Sigma \to 0} \frac{\oint_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A}}{V_\Sigma} = \lim_{V_\Sigma \to 0} \frac{q_\Sigma}{V_\Sigma}. \tag{2.32}$$

Considerînd restrîngerea suprafeţei Σ la un punct, limita din membrul întîi al rela-

ției (2.32) se numește divergența vectorului $\overline{D}$ (se notează *div* $\overline{D}$), iar limita din membrul al doilea este densitatea de volum ρ_v a sarcinii electrice, astfel că relația (2.32) se scrie:

$$\text{div } \overline{D} = \rho_v, \tag{2.33}$$

care reprezintă forma locală a legii fluxului electric.

În coordonate carteziene, divergența are expresia

$$\text{div } \overline{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}, \tag{2.34}$$

unde D_x, D_y și D_z sînt componentele vectorului $\overline{D}$ după cele trei axe.

2.6. CORPUL CONDUCTOR ÎN CÎMP ELECTROSTATIC

Conductoarele fiind caracterizate prin existența unui număr important de sarcini electrice libere care se pot deplasa ordonat dînd naștere unui curent electric de conducție, rezultă că regimul electrostatic în conductoare poate fi realizat numai dacă rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra sarcinilor din conductoare este nulă. Dar în conductoare accelerate sau neomogene din punct de vedere fizic și chimic (conductoare încălzite neuniform, sisteme de conductoare cu diferite concentrații de impurități etc). pot acționa asupra sarcinilor electrice libere (electronii din metale sau ionii din soluții) și forțe de natură neelectrică $\overline{F}_{neel}$.

Raportul dintre forța neelectrică și sarcină se numește convențional *cîmp electric imprimat* $\overline{E}_i$ (cîmp străin, cîmp electromotor):

$$\overline{E}_i = \frac{\overline{F}_{neel}}{q}. \tag{2.35}$$

Din punctul de vedere al forțelor rezultante (de natură electrică $\overline{F}$ și de natură neelectrică $\overline{F}_{neel}$) un conductor se va afla în regim electrostatic dacă este îndeplinită condiția

$$\overline{F} + \overline{F}_{neel} = 0, \tag{2.36}$$

adică

$$\overline{E} + \overline{E}_i = 0, \tag{2.37}$$

numită *condiția de echilibru electrostatic*. Relația (2.37) este o formă particulară a legii conducției electrice (vezi cap. 6).

Dacă ne referim numai la conductoare omogene și neaccelerate ($\overline{E}_i = 0$), condiția de echilibru electrostatic se scrie:

$$\overline{E} = 0. \tag{2.38}$$

Legat de comportarea unui conductor omogen introdus în cîmp electrostatic apar unele fenomene importante din punct de vedere practic: fenomenul de influență electrostatică, efectul de ecran etc.

Se presupune un cîmp electric omogen $\bar{E}_0$ (fig. 2.10, *a*) în care urmează să se introducă un corp din material conductor neîncărcat inițial cu sarcină. Sub acțiunea cîmpului electric exterior $\bar{E}_0$, sarcinile libere din conductor se deplasează creînd un cîmp electric propriu $\bar{E}_p$ (fig. 2.10, *b*). Acest fenomen de încărcare cu sarcini de semn contrar a diferitelor zone din materialul conductor introdus în cîmp electrostatic se numește *influență electrostatică* (sau inducție electrostatică). Deplasarea sarcinilor din conductor are loc în așa fel încît cîmpul electric exterior împreună cu cîmpul electric propriu să dea rezultanta nulă în interiorul corpului conductor, adică să fie îndeplinită condiția de echilibru electrostatic în orice punct din conductor:

$$\bar{E}_0 + \bar{E}_p = 0. \tag{2.39}$$

Prin compunerea cîmpului electric exterior $\bar{E}_0$ cu cîmpul electric propriu $\bar{E}_p$ se obține cîmpul electric rezultant $\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_p$ (fig. 2.10, *c*). În interiorul conductorului cîmpul rezultant este nul în orice punct, iar în exteriorul conductorului cîmpul rezultant nu mai este omogen (liniile de cîmp nu mai sînt paralele și echidistante). Suprafața corpului conductor fiind în regim electrostatic o suprafață echipotențială, înseamnă că liniile cîmpului rezultant vor fi perpendiculare pe suprafața corpului conductor.

Procesul de încărcare prin influență a corpurilor conductoare durează un timp extrem de scurt (sub 10^{-12} s, în cazul metalelor). Dacă în această situație (fig. 2.10, *c*) corpul conductor este secționat (perpendicular pe liniile de cîmp) în două părți izolate între ele, cele două părți rămîn încărcate cu sarcini de semne contrare și după suprimarea cîmpului exterior. Se obține astfel încărcarea prin influență a corpurilor, utilizată în practică în mașinile electrostatice.

Dacă corpul conductor din figura 2.10, *c* are un gol în interior (o cavitate) în care nu se află sarcini electrice, cîmpul rezultant din acest gol este de asemenea nul. Anularea cîmpului electrostatic dintr-o cavitate practicată într-un corp conductor se numește efect *de ecran*. Efectul de ecranare (împotriva cîmpurilor electrice exterioare) este folosit atît în construcția aparatelor electrice de măsură și a elementelor schemelor de măsurare, cît și în energetică. În acest scop, aparatul care trebuie ecranat este introdus într-o carcasă metalică închisă denumită ecran. Experiența arată că pentru ecranare este suficientă numai o sită din material conductor.

Un rol asemănător (de ecranare) are învelișul metalic protector al cablurilor, eliminîndu-se influența electrostatică a cablurilor de transmisie a energiei electrice asupra liniilor aeriene de telecomunicații.

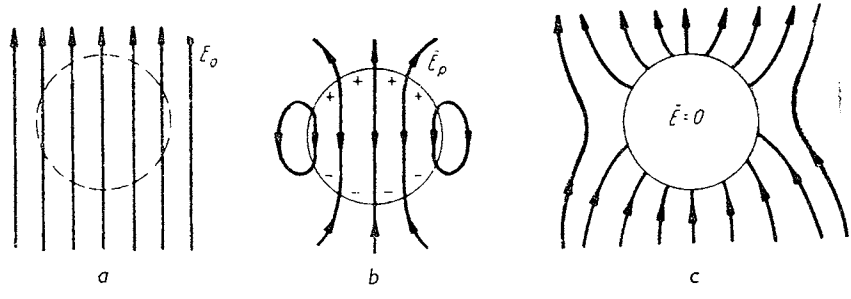


Fig. 2.10.

2.7. SUPRAFEȚE DE DISCONTINUITATE ÎN CÎMP ELECTRIC. REFRACȚIA LINIILOR DE CÎMP

Se consideră două medii omogene cu permitivitățile ε_1 și ε_2 (fig. 2.11). Dacă considerăm un cilindru foarte plat, cu aria bazei ΔA și înălțimea Δs (aria bazei este mult mai mare decît aria laterală), aplicînd legea fluxului electric pe suprafața totală Σ a cilindrului, avem:

$$\oint_{\Sigma} \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = q_{\Sigma} = 0,$$

deoarece nu există sarcini libere în interiorul suprafeței Σ considerate. Neglijînd fluxul prin suprafața laterală a cilindrului, integrala de mai sus se scrie:

$$\overline{D}_1 \cdot \Delta\overline{A} + \overline{D}_2 \cdot \Delta\overline{A} = 0, \tag{2.40}$$

sau:

$$-D_1 \cdot \Delta A \cdot \cos\ \alpha_1 + D_2 \cdot \Delta A \cdot \cos\ \alpha_2 = 0, \tag{2.41}$$

care devine:

$$D_{1n} = D_{2n}. \tag{2.42}$$

Relația (2.42) spune că: la trecerea dintr-un mediu în altul, componentele normale ale inducției se conservă. Considerînd un contur închis Γ (fig. 2.12), în regim electrostatic putem scrie:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = 0. \tag{2.43}$$

Descompunînd integrala și neglijînd contribuția porțiunilor de contur care sînt perpendiculare pe suprafața de separație, avem:

$$E_1 \Delta l \sin\ \alpha_1 - E_2\ \Delta l \sin\ \alpha_2 = 0, \tag{2.44}$$

care devine:

$$E_{1t} = E_{2t}, \tag{2.45}$$

adică: la trecerea vectorului $\bar{E}$ dintr-un mediu în altul, se conservă com-

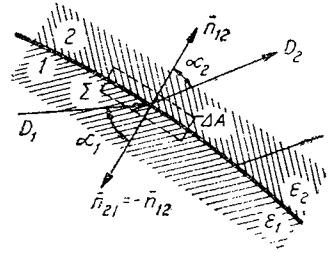


Fig. 2.11.

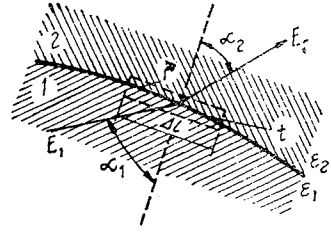


Fig. 2.12.

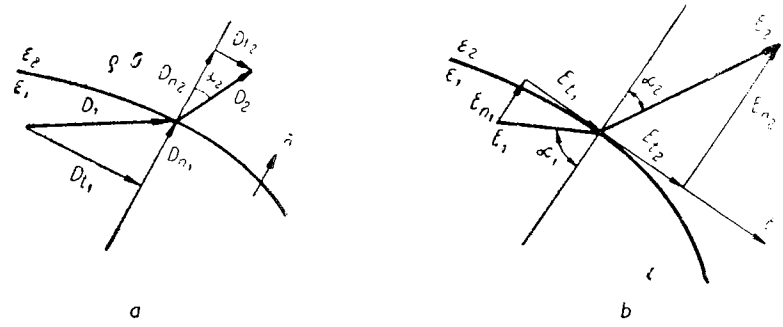


Fig. 2.13.

ponenta sa tangențială. Relațiile (2.42) și (2.45) sînt ilustrate în figurile 2.13, *a* și respectiv 2.13, *b*.

Pentru medii omogene și izotrope se poate scrie:

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 ; \; D_2 = \varepsilon_2 E_2. \tag{2.46}$$

Din figura 2.13 avem relațiile:

$$D_{1n} = D_{2n} = D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2 \tag{2.47}$$

$$E_{1t} = E_{2t} = E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2. \tag{2.48}$$

Din (2.46) și (2.47) avem:

$$\varepsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \alpha_2. \tag{2.49}$$

Împărțind ultima egalitate din (2.48) la (2.49) se deduce relația:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\varepsilon_2} \text{ sau } \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{2.50}$$

Această relație reprezintă teorema refracției liniilor de cîmp: la trecerea dintr-un mediu în altul, liniile de cîmp suferă o refracție, astfel încît, dacă mediul în care trec liniile are $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, liniile de cîmp se vor îndepărta de normală.

2.8. METODELE ELECTROSTATICII

În electrostatică problema fundamentală constă în determinarea intensității cîmpului și potențialului punctelor din spațiu în care se exercită acțiunea cîmpului electric, dacă se cunosc distribuțiile de sarcini pe conductoare și poziția relativă a conductoarelor.

2.8.1. Metoda directă

Se determină intensitatea cîmpului electric folosind principiul superpoziției cîmpurilor (relația 1.20, în care s-a înlocuit pentru substanță ε_0 cu ε și $\bar{E}_v$ cu $\bar{E}$):

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int_V \rho_v \frac{\bar{R}}{R^3}\,dV + \int_A \rho_s \frac{\bar{R}}{R^3}\,dA + \int_C \rho_l \frac{\bar{R}}{R^3}\,ds + \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{R_k^3}\bar{R}_k\right]. \qquad (2.51)$$

Odată calculat cîmpul cu această relație potențialul se determină cu relația (2.18):

$$V_A = \int_A^P \bar{\cdot} \cdot \overline{ds}.$$

Exemple de aplicare a acestei metode au fost date în par. 1.7.

2.8.2. Calculul cîmpului folosind teorema lui Gauss

Această metodă se utilizează pentru corpuri care prezintă simetrie, în care caz este ușor de efectuat integrala (1.26), care în substanță capătă forma (2.31):

$$\oint_\Sigma \bar{E} \cdot \overline{dA} = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon},$$

de unde rezultă expresia cîmpului, apoi potențialul cu relația (2.18).

2.8.3. Metoda bazată pe teorema potențialului electrostatic

Se calculează mai întîi potențialul cu relația (1.53), scrisă în substanță ($\varepsilon = \varepsilon_0$):

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int_V \rho_V \frac{dV}{R} + \int_A \rho_s \frac{dA}{R} + \int_C \rho_l \frac{ds}{R} + \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{R_k}\right], \qquad (2.52)$$

apoi cîmpul se calculează cu relația (1.50):

$$\bar{E} = -\text{grad } V. \qquad (2.53)$$

După cum s-a precizat și în par. 1.6, relația (2.52) nu este valabilă decît pentru distribuții de sarcină pe corpuri cu dimensiuni finite, pentru care se poate considera $V_\infty = 0$.

2.8.4. Metoda rezolvării ecuațiilor lui Laplace și Poisson

Se pleacă de la forma locală a legii fluxului electric (2.33 și 2.34):

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_v,$$

care se mai poate scrie ($D = \varepsilon E$) și sub forma:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}.$$

Explicitînd componentele E_x, E_y și E_z ale vectorului intensității cîmpului electric $\bar{E}$ în funcție de potențialul V prin relațiile (1.48):

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

se obține ecuația lui Poisson:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}. \tag{2.54}$$

Membrul întîi al acestei ecuații se scrie simbolic sub forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V = \Delta V$$

și se citește *laplacian de V*, astfel că ecuația lui Poisson este:

$$\Delta V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}. \tag{2.55}$$

O soluție a ecuației Poisson este potențialul electric coulombian (vezi 1.53),

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho_v \mathrm{d}V}{R}.$$

În domeniile în care lipsesc sarcinile electrice ($\rho_V = 0$) ecuația (2.54) devine:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \text{ sau } \Delta V = 0 \tag{2.56}$$

și se numește *ecuația lui Laplace.*

Rezolvarea ecuației Poisson sau Laplace se poate efectua numai de la caz la caz, folosind metode în general aproximative.

De exemplu, în cazul unui cîmp plan paralel, cum ar fi la un condensator plan cu distanța între armături foarte mică, ecuația lui Laplace devine:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \tag{2.57}$$

care prin două integrări consecutive conduce la soluția:

$$V = k_1 x + k_2.$$

Constantele k_1 şi k_2 se determină din condiţiile la limită:

$x = 0$; $V(0) = 0$ (potenţialul plăcii negative)

$x = l$; $V(l) = U$ (tensiunea aplicată plăcilor),

de unde:

$$k_2 = 0 \text{ şi } k_1 = \frac{U}{l}.$$

Cu aceste constante, potenţialul V al unui punct oarecare din dielectricul condensatorului plan este:

$$V = \frac{U}{l} \cdot x, \tag{2.58}$$

unde x este distanţa de la punctul considerat pînă la placa negativă, iar l este distanţa între plăci.

2.8.5. Metoda aproximării liniilor de cîmp

Se poate uneori aproxima spectrul liniilor de cîmp prin linii drepte şi arce de cerc. Ca exemplu (fig. 2.14) se cere să se afle tensiunea între două plăci metalice ca în figură, încărcate cu sarcini egale şi de semn contrar. Cîmpul se aproximează aşa cum se vede în figură prin linii drepte şi arce de cerc racordate. Tensiunea între plăci va fi:

$$U_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \bar{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = E(D + \pi x). \tag{2.59}$$

Se aplică legea fluxului electric:

$$q = \oint_{\Sigma} \varepsilon \bar{E} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = 2\varepsilon \int_0^a E \cdot l \cdot dx, \tag{2.60}$$

unde Σ este suprafaţa unui paraleliped ce îmbracă strîns placa (*1*) (deci ambele feţe ale ei). Din (2.59) şi (2.60) rezultă:

$$q = 2\varepsilon l \int_0^a \frac{U_{12}}{D + \pi x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\varepsilon l}{\pi} U_{12} \ln\left(\frac{D}{\pi} + x\right)\Big|_0^a = \frac{2\varepsilon l U_{12}}{\pi} \cdot \ln\frac{D + \pi a}{D},$$

de unde:

$$U_{12} = \frac{q\pi}{2\varepsilon l \cdot \ln\dfrac{D + \pi a}{D}}. \tag{2.61}$$

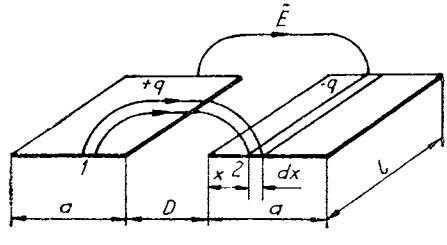


Fig. 2.14.

2.8.6. Metoda imaginilor electrice pentru determinarea cîmpului şi potenţialului

Metoda se aplică în cazul în care există corpuri încărcate în prezenţa unui conductor de suprafaţă mare. Metoda se bazează pe următorul artificiu: se înlocuieşte suprafaţa conductoare Σ (echipotenţială) cu un sistem de sarcini $q'_1, q'_2, \ldots$ numite imagini, de valori şi poziţii astfel alese încît sistemul rezultant ($q_1, q_2, q_3, \ldots$ împreună cu $q'_1, q'_2, q'_3 \ldots$) să producă un astfel de cîmp încît suprafaţa Σ să rămînă echipotenţială. Astfel problema determinării cîmpului şi potenţialului creat de sarcini în prezenţa unei suprafeţe conductoare se reduce la problema determinării lor pentru un sistem mai complex de sarcini dar mediul este omogen. Vom aplica metoda pe cîteva exemple.

2.8.6.1. Cîmpul produs de două conductoare cilindrice, paralele, nefiliforme, încărcate cu sarcini opuse ($q_1 = -q_2 = q$). Considerăm în figura 2.15 conductoarele ca avînd razele R_1 şi R_2. Fie care conductor e o suprafaţă echipotenţială a cărei ecuaţie (1.77) este verificată pentru valorile c_1 şi c_2 corespunzătoare razelor R_1 şi R_2 ale celor două conductoare metalice nefiliforme. Se înlocuieşte sistemul celor două conductoare nefiliforme prin două conductoare filiforme (numite axe electrice), care produc un cîmp ale cărui suprafeţe echipotenţiale sînt cilindrii determinaţi mai sus. Se cere să se determine poziţia axelor electrice (conductoarele filiforme *1* şi *2*). În figura 2.15 se dau R_1, R_2 şi d şi se cere S_1, S_2 şi a. Din figura 2.15 rezultă următoarele relaţii:

$$\frac{2ac_1}{c_1^2 - 1} = R_1; \quad \frac{2ac_2}{c_2^2 - 1} = R_2 \tag{2.62}$$

$$a\frac{c_1^2 + 1}{c_1^2 - 1} = S_1; \quad a\frac{c_2^2 + 1}{c_2^2 - 1} = S_2$$

$$S_1 + S_2 = d. \tag{2.63}$$

Eliminînd c_1 din S_1, R_1 şi c_2 din S_2, R_2, se obţin relaţiile:

$$S_1^2 - R_1^2 = a^2 \tag{2.64}$$

$$S_2^2 - R_2^2 = a^2. \tag{2.65}$$

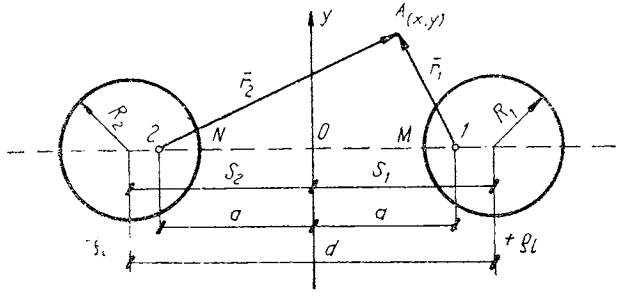


Fig. 2.15.

Scăzînd (2.64) şi (2.65) avem:

$$S_1^2 - S_2^2 = R_1^2 - R_2^2. \tag{2.66}$$

Din (2.63) şi (2.66) se obţine:

$$S_1 = \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d} \tag{2.67}$$

$$S_2 = \frac{R_2^2 - R_1^2 + d^2}{2d}. \tag{2.68}$$

Din (2.64) avem:

$$a = \sqrt{S_1^2 - R_1^2} = \frac{1}{2d}\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + d^2)^2 - 4R_1^2 d^2} \tag{2.69}$$

sau:

$$a = \frac{1}{2d}\sqrt{(R_1 - d + R_2)(R_1 - d - R_2)(R_1 + d + R_2)(R_1 + d - R_2)}. \tag{2.70}$$

Relaţiile (2.67), (2.68) şi (2.70) au rezolvat problema enunţată, adică sistemul celor două conductoare nefiliforme, de raze R_1 şi R_2, se înlocuieşte cu conductoare filiforme situate la distanţa $2a$, care produc acelaşi cîmp ca şi conductoarele reale.

Odată fixată poziţia axelor, conform figurii 2.15, se determină potenţialul punctelor din spaţiu cu relaţia (1.74), adică:

$$V_A = \frac{\rho l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \tag{2.71}$$

sau:

$$V_A = \frac{\rho l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}. \tag{2.72}$$

Cîmpul se poate calcula apoi cu (1.50).

Potenţialele celor două conductoare se deduc din relaţia (2.72) dacă punctul A se mută în punctele M şi respectiv N (fig. 2.15). Se obţine:

$$\begin{aligned} V_M &= \frac{\rho l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a + S_1 - R_1}{a - S_1 + R_1} \\ V_N &= -\frac{\rho l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a + S_2 - R_2}{a - S_2 + R_2}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Dacă conductoarele sînt identice ($R_1 = R_2 = R$), avem:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 = \frac{d}{2} \\ a &= \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4R^2}, \end{aligned} \tag{2.74}$$

iar potențialele celor două conductoare sînt:

$$V_M = -V_N = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4R^2} + \frac{d}{2} - R}{\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4R^2} - \frac{d}{2} - R}; \tag{2.75}$$

Pentru $R \ll \frac{d}{2}$, avem:

$$V_M = -V_N \cong \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d - R}{R}. \tag{2.76}$$

Tensiunea între cele două conductoare este:

$$U_{MN} = V_M - V_N = 2V_M = \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d - R}{R}. \tag{2.77}$$

2.8.6.2. **Cîmpul și potențialul produs de un conductor nefiliform, paralel cu pămîntul** (fig. 2.16). Pentru a calcula cîmpul și potențialul unui punct A din acest cîmp vom înlocui sistemul conductor — pămînt cu un sistem de două conductoare identice situate simetric față de pămînt și care produc împreună un cîmp astfel încît suprafața pămîntului (haşurată în figură) să aibă potențialul nul. Al doilea conductor (desenat cu linie întreruptă) se numește imaginea electrică a primului conductor față de pămînt și va fi încărcat cu sarcină opusă. Axele electrice ale acestor conductoare sînt definite de distanța a, care, cu (2.74), este:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4R^2}. \tag{2.78}$$

Potențialul punctului A este dat astfel de (2.72).

Potențialul conductorului față de pămînt este dat de (2.75), iar pentru $R \ll \frac{d}{2}$, de (2.76).

Cîmpul se poate calcula cu relația generală (1.50) dacă se cunoaște potențialul.

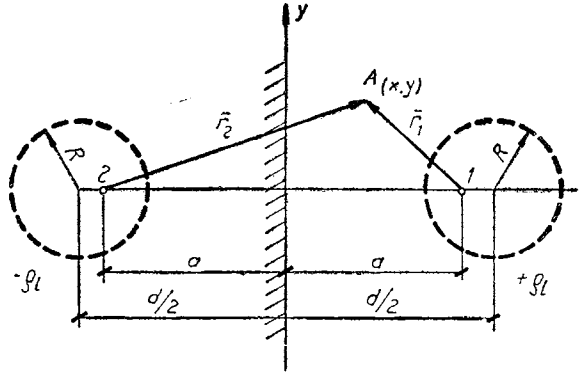


Fig. 2.16.

2.8.6.3. **Cîmpul şi potenţialul produs de două conductoare paralele cu pămîntul** (fig. 2.17). Conductoarele *1* şi *2* încărcate cu sarcini de distribuţie liniară $+\rho_l$ şi $-\rho_l$ se află la distanţă $h = \frac{d}{2}$ de pămînt, au razele egale cu R şi distanţa între axele conductoarelor este D.

Se reprezintă imaginile lor electrice faţă de pămînt (*1'* şi *2'*) încărcate cu sarcinile $-\rho_l$ şi respectiv $+\rho_l$.

Potenţialul unui punct A din cîmp se calculează prin superpoziţie şi conform (1.74) va avea expresia:

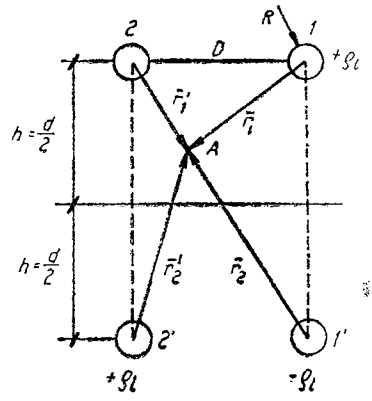


Fig. 2.17.

$$V_A = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{r_2}{r_1} + \ln\frac{r_1'}{r_2'}\right] = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2 \cdot r_1'}{r_1 \cdot r_2'}. \tag{2.79}$$

Particularizînd relaţia (2.79), se găseşte potenţialul celor două conductoare.

Pentru conductorul *1* avem:

$$r_1 = R;\quad r_2 \cong d;\quad r_1' \cong D;\quad r_2' \cong \sqrt{D^2 + d^2}.$$

Din (2.79) rezultă:

$$V_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d \cdot D}{R\sqrt{D^2 + d^2}}. \tag{2.80}$$

În mod analog se găseşte potenţialul conductorului al doilea:

$$V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R\sqrt{D^2 + d^2}}{d \cdot D}. \tag{2.81}$$

Tensiunea între conductoare este:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d \cdot D}{R\sqrt{D^2 + d^2}}. \tag{2.82}$$

Cîmpul se poate calcula din (2.79) cu formula (1.50).

CAPITOLUL 3.

CAPACITATE ELECTRICĂ

Se consideră un sistem de n conductoare omogene în prezența pămîntului (fig. 3.1), situate într-un mediu liniar (ε constant) și neîncărcat ($\rho_V = 0$).

Cîmpul electrostatic al sistemului considerat este complet determinat fie de sarcinile conductoarelor (q_1, q_2 și q_3), fie de potențialele lor (V_1, V_2 și V_3), fie de sarcinile a o parte din conductoare (de exemplu q_1 și q_2) și potențialele celorlalte (V_3).

Cîmpul electrostatic produs de două sau mai multe repartiții de sarcini (în medii liniare) este egal cu suma cîmpurilor produse de fiecare repartiție în parte. Valabilitatea acestei afirmații derivă din faptul că relațiile fundamentale ale cîmpului electrostatic sînt liniare (în medii liniare).

Dacă toate sarcinile unui sistem de conductoare cresc de λ ori, potențialele conductoarelor, respectiv potențialul fiecărui punct din spațiu, cresc de λ ori.

3.1. CONDENSATOARE

Se numește condensator un dispozitiv alcătuit din două conductoare omogene (numite armături), încărcate cu sarcini egale și de semne contrare, separate de un dielectric.

Capacitatea condensatorului se definește ca raportul între sarcina unei armături și diferența de potențial între ele:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{U_{12}} > 0. \tag{3.1}$$

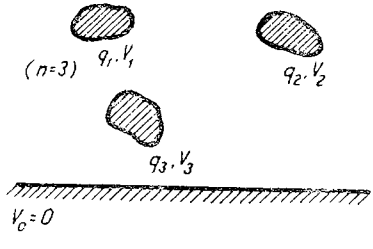


Fig. 3.1.

Acest raport este pozitiv și nu depinde decît de forma și dimensiunile armăturilor și de permitivitatea ε a dielectricului.

Capacitatea, în sistemul internațional, se măsoară în farad (1 F):

$$C = \frac{q}{U} = \frac{1\,\text{C}}{1\,\text{V}} = 1\ \text{F}, \tag{3.2}$$

avînd submultiplii: microfarad ($1\mu\ \text{F} = 10^{-6}\ \text{F}$), nanofarad ($1\ \text{nF} = 10^{-9}\ \text{F}$) și picofarad ($1\ \text{pF} = 10^{-12}\ \text{F}$).

Practic, un sistem de două conductoare formează un condensator, dacă aplicînd o tensiune între cele două armături, toate liniile de cîmp care pleacă de pe o armătură ajung pe cealaltă.

Dacă se dă condensatorul, cu dielectric omogen, capacitatea sa este o funcţie de mărimile geometrice (g_1, g_2 etc), care caracterizează forma, dimensiunile şi poziţia relativă a armăturilor şi este proporţională cu permitivitatea ε a dielectricului:

$$C = \varepsilon \cdot f(g_1, g_2, \ldots, g_n). \qquad (3.3)$$

În cazul mediilor dielectrice neomogene, cînd în diferite domenii permitivitatea dielectricului este diferită (ε_1, ε_2, ..., ε_n), capacitatea este o funcţie de forma:

$$C = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n; g_1, g_2, \ldots, g_n), \qquad (3.4)$$

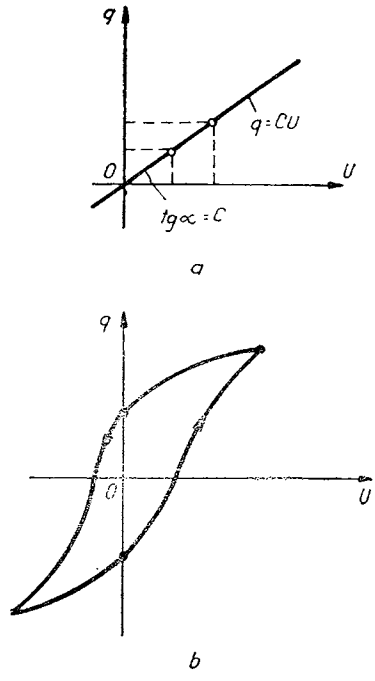


Fig. 3.2.

În medii liniare (permitivitatea ε independentă de cîmp) capacitatea unui condensator nu depinde nici de tensiunea aplicată la borne nici de sarcinile de pe armături. Această afirmaţie se poate verifica experimental. Se încarcă condensatorul sub diverse tensiuni şi se măsoară sarcinile electrice. Se obţine caracteristica $q = f(U)$ a condensatorului (fig.3.2, *a*), care este o dreaptă ce trece prin origine, avînd panta egală cu capacitatea condensatorului.

În medii neliniare (materialele feroelectrice) caracteristica $q = f(U)$ a condensatorului (fig. 3.2, *b*) este asemenea cu caracteristica $D = f(E)$ a dielectricului neliniar dintre armături. În acest caz capacitatea condensatorului depinde de tensiunea aplicată între armăturile sale. Se defineşte o capacitate statică C_s cu relaţia:

$$C_s = \frac{q}{U} \qquad (3.5)$$

şi o capacitate dinamică (diferenţială) C_d cu relaţia:

$$C_d = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}U}. \qquad (3.6)$$

3.2. CALCULUL CAPACITĂŢILOR

Calculul capacităţii celor mai simple condensatoare se efectuează în următoarele etape:

— Se consideră armăturile încărcate cu sarcinile $+q$ şi $-q$.

— Se calculează intensitatea cîmpului E într-un punct dintre armături, sau potențialele celor două armături V_1 și V_2.

— Se calculează tensiunea $U_{12} = V_1 - V_2 = \int_{(1)}^{(2)} \bar{E} \cdot \overline{ds}$.

— Se determină capacitatea cu relația:

$$C = \frac{q}{U_{12}}.$$

Exemple

a) Capacitatea condensatorului plan

Se presupune mediul omogen, izotrop și liniar, lipsit de polarizație permanentă.

Pentru uniformizarea cîmpului (eliminarea efectului de capăt), condensatorul se prevede cu un inel de gardă (fig. 3.3).

Etapele de calcul sînt:

— Se consideră $q_1 = q$ și $q_2 = -q$.

— Intensitatea cîmpului între armături, dată de relația (1.66), este $E = \frac{q}{A\varepsilon}$, unde A este suprafața armăturii.

— Tensiunea între plăci (armături) va fi:

$$U_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \bar{E} \cdot \overline{ds} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{q}{\varepsilon A} \cdot ds = \frac{q}{\varepsilon A} \cdot d, \tag{3.7}$$

unde d este distanța dintre armături.

— Se determină capacitatea cu relația (3.1):

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}. \tag{3.8}$$

Din această relație rezultă și unitatea de măsură a permitivității ε: farad pe metru (F/m).

b) Capacitatea condensatorului cilindric (fig. 3.4)

Etapele de calcul sînt:

— Se consideră: $q_1 = +q$; $q_2 = -q$.

— Se calculează cîmpul electric: $E = \frac{q}{2\pi\varepsilon r l}$ (relația 1.68).

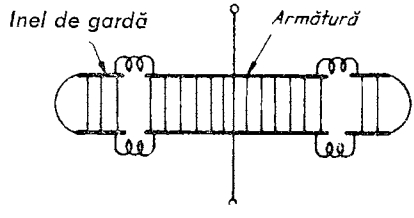


Fig. 3.3.

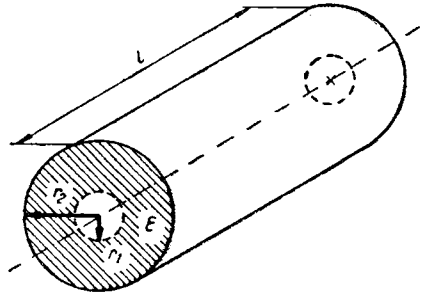


Fig. 3.4.

— Se calculează tensiunea dintre armături:

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon r l} \cdot \mathrm{d}r = \frac{q}{2\pi\varepsilon l} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

— Capacitatea este deci:

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{3.9}$$

Notaţiile folosite corespund figurii 3.4.

c) Capacitatea condensatorului sferic (fig. 3.5)

Etapele de calcul sînt:

— Se consideră: $q_1 = -q_2 = q$.

— Se calculează cîmpul electric:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \text{ (relaţia 1.56).}$$

— Se calculează tensiunea între armături:

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

— Rezultă capacitatea:

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon \cdot r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \tag{3.10}$$

d) Capacitatea unei linii bifilare cu 2 conductoare paralele, infinit de lungi, aflate la distanţa d şi avînd razele R_1 şi R_2 (fig. 3.6)

— Se consideră: $q_1 = -q_2 = q$.

— Potenţialul electric într-un punct din cîmp este:

$V_A = \frac{q}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}$, conform relaţiei (1.74), iar suprafeţele echipotenţiale sînt date de relaţia (1.75), adică: $\frac{r_2}{r_1} = \text{const.}$

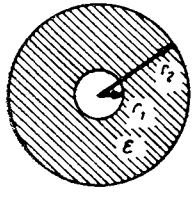


Fig. 3.5.

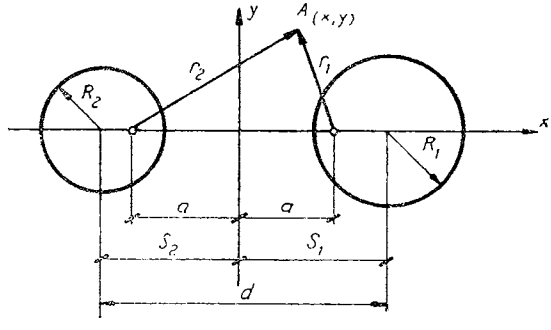


Fig. 3.6.

— Potențialele conductoarelor sînt date de relațiile:

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon l} \ln c_1 \tag{3.11}$$

$$V_2 = \frac{b}{2\pi\varepsilon l} \ln c_2. \tag{3.12}$$

— Tensiunea între conductoare este:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{c_1}{c_2}. \tag{3.13}$$

— Capacitatea liniei bifilare rezultă:

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \dfrac{c_1}{c_2}}. \tag{3.14}$$

Trebuie aflate constantele c_1 și c_2. Ele satisfac ecuația (1.77) (vezi fig. 2.15):

$$\left(x - \frac{c^2+1}{c^2-1} a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ac}{c^2-1}\right)^2. \tag{3.15}$$

Prin identificare se obțin relațiile (2.62), care rezolvate în raport cu necunoscutele c_1 și c_2 conduc la relațiile:

$$c_1 = \frac{S_1}{R_1} + \sqrt{\frac{S_1^2}{R_1^2} - 1}; \quad c_2 = \frac{S_2}{R_2} - \sqrt{\frac{S_2^2}{R_2^2} - 1}. \tag{3.16}$$

Introducînd (3.16) în (3.14) se determină capacitatea liniei bifilare:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \dfrac{d^2 + R_1^2 + R_2^2 + \sqrt{(R_1+R_2+d)(R_1+R_2-d)(R_1-R_2+d)(R_1-R_2-d)}}{2R_1R_2}} \tag{3.17}$$

Semnificația mărimilor din (3.17) se poate vedea în figura 3.6.

Cazuri particulare

1. Capacitatea unui condensator cilindric (axele coincid). În relația (3.17) se face $d = 0$ și se obține relația:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \dfrac{R_1^2 + R_2^2 + R_2^2 - R_1^2}{2R_1 \cdot R_2}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}, \tag{3.18}$$

relație identică cu (3.9).

2. Conductoare paralele și egale (filiforme). În relația (3.17) se consideră: $R_1 = R_2 = R \ll d$ și se obține:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \dfrac{d^2 + 2R^2 + d\sqrt{d^2 - 4R^2}}{2R^2}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \dfrac{d^2 + 2R^2 + d^2}{2R^2}} \cong \frac{\pi\varepsilon l}{\ln \dfrac{d}{R}}. \tag{3.19}$$

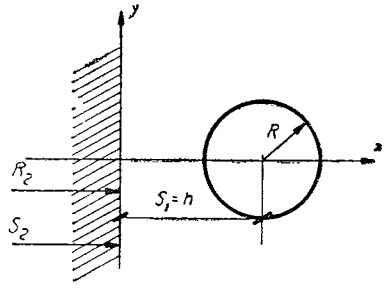


Fig. 3.7.

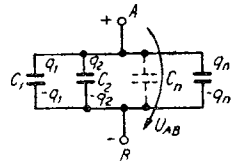


Fig. 3.8.

3. Capacitatea dintre un fir conductor și pământ (fig. 3.7). În acest caz, în relațiile (3.16) se face trecerea la limită, deoarece $R_2 \to \infty$ și $S_2 \to \infty$ și notînd $S_1 = h \gg R_1 = R$, avem:

$$c_1 = \frac{2h}{R} \tag{3.20}$$

$$c_2 = 1. \tag{3.21}$$

Relația (3.14) devine:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{c_1}{c_2}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{2h}{R}}. \tag{3.22}$$

3.3. TEOREMELE CAPACITĂȚILOR ECHIVALENTE

Prin definiție, capacitatea echivalentă a unei grupări de condensatoare este raportul dintre sarcina absorbită de la sursă pe la una din borne și tensiunea sursei, dacă inițial toate condensatoarele erau descărcate:

$$C_e = \frac{q_A}{U_{AB}}. \tag{3.23}$$

În cazul conectării în paralel a mai multor condensatoare (fig. 3.8), deoarece tensiunea la bornele lor este constantă, ele se vor încărca cu sarcini, date de relațiile:

$$q_1 = C_1 U_{AB};\ q_2 = C_2 U_{AB} \ \ldots\ q_n = C_n U_{AB}. \tag{3.24}$$

Sarcina absorbită de la sursă pe la borna A este:

$$q_A = q_1 + q_2 + \ldots + q_n, \tag{3.25}$$

sau:

$$q_A = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n) \cdot U_{AB}. \tag{3.26}$$

Din (3.23) și (3.26) se deduce expresia capacității echivalente la legarea condensatoarelor în paralel:

$$C_e = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \tag{3.27}$$

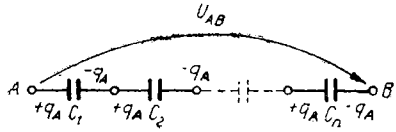


Fig. 3.9.

În cazul conectării în serie (fig. 3.9), deoarece toate condensatoarele se încarcă cu aceeaşi sarcină:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q_A, \qquad (3.28)$$

tensiunea la bornele fiecărui condensator în parte va fi:

$$U_1 = q_A \cdot \frac{1}{C_1};\ U_2 = q_A \frac{1}{C_2} \ldots U_n = q_A \frac{1}{C_n} \qquad (3.29)$$

Tensiunea între bornele AB este:

$$U_{AB} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = q_A \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right). \qquad (3.30)$$

Din (3.23) şi (3.30) rezultă capacitatea echivalentă la legarea în serie a mai multor condensatoare:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k} \qquad (3.31)$$

Relaţiile (3.27) şi (3.31) reprezintă teoremele capacităţilor echivalente.

3.4. RELAŢIILE LUI MAXWELL PRIVITOARE LA CAPACITĂŢI

În cazul unui sistem de n conductoare, situate într-un mediu dielectric, omogen, izotrop, liniar şi în lipsa polarizaţiei permanente se constată că între sarcinile (q_1, q_2, $\ldots q_n$) şi potenţialele conductoarelor (V_1, $V_2 \ldots V_n$) există relaţii de legătură liniare şi omogene:

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot q_j; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.32)$$

Aceste relaţii reprezintă prima formă a relaţiilor lui Maxwell, privitoare la capacităţi, în care α_{ij} se numesc *coeficienţi de potenţial*. Ei nu depind decît de forma, dimensiunile, poziţia conductoarelor şi de natura dielectricului (ε) (nu depind nici de sarcinile şi nici de potenţialele conductoarelor). Cu ajutorul acestor relaţii se pot determina potenţialele corpurilor dacă se cunosc sarcinile lor şi coeficienţii de potenţial α_{ij} (se poate arăta că $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$).

De exemplu, pentru un sistem de trei conductoare, încărcate cu sarcinile q_1, q_2 şi q_3, relaţiile (3.32) capătă forma:

$$\begin{aligned} V_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 \\ V_2 &= \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 \\ V_3 &= \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 \end{aligned} \qquad (3.33)$$

Relațiile (3.32) pot fi rezolvate și invers, adică:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \cdot V_j \,;\ (i = 1,\ 2,\ \ldots\ n) \tag{3.34}$$

Acestea reprezintă a doua formă a relațiilor lui Maxwell, unde γ_{ij} $(i \neq j)$ sînt numiți *coeficienți de influență electrică*, iar γ_{ii} sînt numiți *coeficienți de capacitate electrică* (proprie). Coeficienții γ_{ij} sînt funcție de α_{ij}, deci depind de mediu, de forma, dimensiunile conductoarelor și de poziția lor. Nu depind de sarcini și nici de potențiale.

Se poate demonstra că:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}\,; \quad \gamma_{ii} > 0 \quad \text{și} \quad \gamma_{ij} < 0 \quad (i \neq j). \tag{3.35}$$

În locul coeficienților negativi se introduc mărimile pozitive date de relațiile:

$$-\gamma_{ij} = +C_{ij}\,; \qquad +\gamma_{ii} = +C_{ii}. \tag{3.36}$$

Coeficienții C_{ij} se numesc coeficienți de *capacitate parțială*, sau simplu *capacități parțiale* (între perechile de conductoare i și j).

Pentru trei conductoare, analog cu relația (3.33), se obține din (3.34) forma:

$$\begin{aligned} q_1 &= \gamma_{11}V_1 + \gamma_{12}V_2 + \gamma_{13}V_3 \\ q_2 &= \gamma_{21}V_1 + \gamma_{22}V_2 + \gamma_{23}V_3 \\ q_3 &= \gamma_{31}V_1 + \gamma_{32}V_2 + \gamma_{33}V_3 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Urmărind explicitarea sarcinilor în funcție de tensiuni, adică în funcție de diferența de potențial dintre două conductoare $(U_{ij} = V_i - V_j)$, sistemul (3.34) poate fi pus sub altă formă. De exemplu, prima ecuație din (3.37), cu notațiile (3.36) se scrie:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11}(V_1 - V_1) + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) + \\ &+ (C_{11} - C_{12} - C_{13})V_1 = C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + C_{10}U_{10}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

unde: $V_1 - V_1 = 0$; $V_1 - V_2 = U_{12}$; $V_1 - V_3 = U_{13}$; $V_1 = V_1 - V_0 = U_{10}$ și $C_{11} = C_{10} + C_{12} + C_{13}$.

În cazul general, relația (3.38) se scrie:

$$q_i = \sum_{j=0}^{n} C_{ij}\,(V_i - V_j) = \sum_{j=0}^{n} C_{ij}\,U_{ij}, \tag{3.39}$$

cunoscută sub denumirea de cea de *a treia formă* a relațiilor lui Maxwell (cea mai importantă).

Pentru trei conductoare, în prezența pămîntului, relațiile (3.39) capătă forma:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} \\ q_2 &= C_{20}U_{20} + C_{21}U_{21} + C_{23}U_{23} \\ q_3 &= C_{30}U_{30} + C_{31}U_{31} + C_{32}U_{32} \end{aligned} \tag{3.40}$$

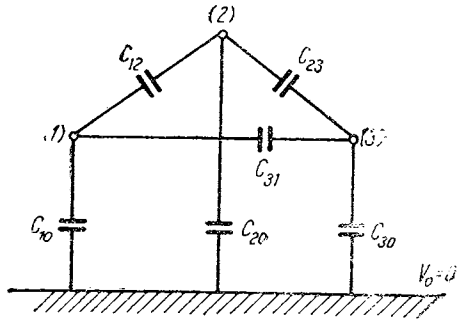


Fig. 3.10.

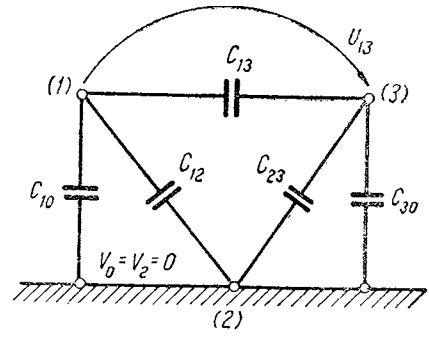


Fig. 3.11

unde C_{ij} se numeşte *capacitate parţială* între perechea de conductoare i şi j ($C_{ij} = C_{ji}$), iar C_{i0} se numeşte *capacitate parţială* faţă de pămînt ($V_0 = 0$).

Relaţiilor (3.40) li se poate ataşa schema echivalentă din figura 3.10. Se precizează că această schemă echivalentă se referă numai la sarcinile şi potenţialele conductoarelor, nu şi la cîmpul sau potenţialul din jurul conductoarelor.

Capacităţile de serviciu dintre perechile de conductoare se definesc ca raportul dintre sarcina unui conductor şi diferenţa de potenţial dintre acele conductoare, cînd în sistem se impun condiţii suplimentare. Aceste condiţii suplimentare se numesc *condiţii de serviciu*. De exemplu, se cere să se determine capacitatea de serviciu între conductoarele *1* şi *3* din figura 3.10 în următorul „serviciu": $q_1 = -q_3$ şi $V_2 = 0$. În acest serviciu, schema din figura 3.10 se transformă în schema din figura 3.11. Deoarece $q_1 = -q_3$, schema poate fi considerată ca o reţea de condensatoare alimentată la tensiunea U_{13}. Capacitatea de serviciu devine în acest caz:

$$C_{s13} = \frac{q_1}{u_{13}} = C_{13} + \frac{(C_{10} + C_{12})(C_{30} + C_{23})}{(C_{10} + C_{12}) + (C_{30} + C_{23})}, \tag{3.41}$$

obţinută din teorema capacităţilor echivalente (C_{10} şi C_{12} sînt conectate în paralel; C_{23} şi C_{30} sînt conectate în paralel etc.).

Aplicaţie

Calculul coeficienţilor de potenţial şi al capacităţii de serviciu a unei linii aeriene bifilare simetrice în prezenţa pămîntului (fig. 2.17).

Raza firului este R, distanţa între fire D, înălţimea faţă de pămînt $h = \frac{d}{2}$, iar sarcinile celor două fire, $q_1 = \rho_l \cdot l = q$, $q_2 = -\rho_l \cdot l = -q$, l fiind lungimea firelor.

Utilizînd metoda imaginilor electrice, în paragraful 2.8.6.3 s-au determinat potenţialele celor două fire (relaţiile 2.80 şi 2.81):

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \cdot l} \cdot \ln\frac{dD}{R\sqrt{D^2 + d^2}},$$
$$V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \cdot l} \cdot \ln\frac{R\sqrt{D^2 + d^2}}{dD}. \tag{3.42}$$

Pentru sistemul de două conductoare din figura 2.17, relaţiile lui Maxwell (3.32) capătă forma particulară:

$$V_1 = \alpha_{11} \cdot q_1 + \alpha_{12} \cdot q_2 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})q$$
$$V_2 = \alpha_{21} \cdot q_1 + \alpha_{11} \cdot q_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22})q. \tag{3.43}$$

Avînd în vedere simetria configuraţiei geometrice a sistemului de conductoare (din care rezultă $\alpha_{11} = \alpha_{22}$) şi ţinînd cont de condiţia de reciprocitate ($\alpha_{12} = \alpha_{21}$), din relaţiile (3.42) şi (3.43) se obţin coeficienţii de potenţial:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \ln \frac{d}{R} = \alpha_{22}$$
$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l} \cdot \ln \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{D} = \alpha_{21}. \tag{3.44}$$

Capacitatea de serviciu a unui conductor faţă de pămînt este (cu $V_0 = 0$):

$$C_1 = \frac{q}{V_1 - V_0} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \dfrac{dD}{R\sqrt{D^2 + d^2}}} = C_2 = \frac{q}{V_2 - V_0}, \tag{3.45}$$

iar capacitatea între cele două conductoare, în prezenţa pămîntului, este:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln \dfrac{dD}{R\sqrt{D^2 + d^2}}}. \tag{3.46}$$

CAPITOLUL 4

ENERGIA ŞI FORŢELE ELECTROSTATICE

4.1. ENERGIA CÎMPULUI ELECTROSTATIC

Pentru a stabili un cîmp electric într-un domeniu al spaţiului unde acesta era iniţial nul este necesar să transportăm sarcini electrice din exterior (de la ∞) cu care se încarcă corpurile. *Energia cîmpului electric* este egală cu lucrul mecanic total efectuat pentru transportul acestor sarcini.

Pentru a putea defini energia în acest fel trebuie să se facă anumite ipoteze şi anume:

— Se consideră mediul izotrop, liniar şi lipsit de polarizaţie permanentă.

— Operaţia de înmagazinare a sarcinii pe conductoare se face foarte lent, pentru a putea considera cîmpul ca fiind electrostatic şi pentru a nu exista transformări ireversibile ale lucrului mecanic efectuat în căldură.

— Se consideră că sistemul de conductoare este imobil pentru a nu se pierde lucru mecanic pentru deformarea sau deplasarea conductoarelor.

În aceste ipoteze se va stabili expresia energiei cîmpului electrostatic în funcţie de sarcina şi potenţialul conductoarelor ce produc cîmpul.

Se presupune starea iniţială identic nulă: $q_{i(0)} = 0$ şi $V_{i(0)} = 0$, iar starea finală dată de sarcinile $q_1, q_2, \ldots, q_n$ şi potenţialele $V_1, V_2, \ldots, V_n$. O stare intermediară se va nota prin:

$$q'_1, q'_2, \ldots, q'_n \tag{4.1}$$

$$V'_1, V'_2, \ldots, V'_n$$

Se admite că stabilirea stării finale se face proporţional, adică există relaţiile:

$$q'_i = \lambda \cdot q_i; \qquad V'_i = \lambda \cdot V_i. \tag{4.2}$$

Pentru a trece sistemul din starea q'_i într-o stare foarte apropiată $q'_i + \mathrm{d}q'_i$ e necesar să se cheltuie un lucru mecanic pentru deplasarea sarcinii $\mathrm{d}q'_i$ contra cîmpului (fig. 4.1).

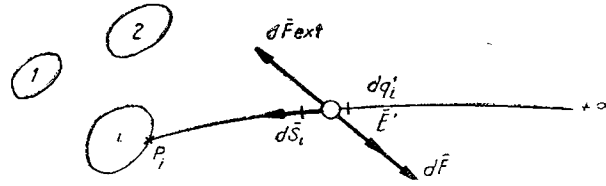


Fig. 4.1.

Rezultă deci:

$$d\bar{F}_{ext} = -d\bar{F} = -\bar{E}'dq_i'. \tag{4.3}$$

Diferențiala de ordinul doi a lucrului mecanic efectuat este:

$$d^2L = \sum_{i=1}^{n} d\bar{F}_{ext} \cdot \overline{ds_i} = -\sum_{i=1}^{n} \bar{E}'\, dq_i' \cdot \overline{ds_i}, \tag{4.4}$$

apoi:

$$dL = -\sum_{i=1}^{n} dq_i' \int_{\infty}^{P_i} \overline{E'} \cdot \overline{ds_i} = \sum_{i=1}^{n} V_i' \cdot dq_i'. \tag{4.5}$$

Lucrul mecanic efectuat va duce la creșterea energiei sistemului, deci:

$$dL = dW_e = \sum_{i=1}^{n} V_i' \cdot dq_i'. \tag{4.6}$$

Cu relațiile (4.2) se obține

$$dW_e = \sum_{i=1}^{n} \lambda V_i \cdot q_i \cdot d\lambda, \tag{4.7}$$

care prin integrare conduce la:

$$W_e = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot q_i \cdot \lambda \cdot d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot q_i. \tag{4.8}$$

Relația (4.8) dă expresia *energiei înmagazinată în cîmpul electric* al unor conductoare care au sarcinile q_i și potențialele V_i.

Aplicație

Calculul energiei înmagazinate în cîmpul electric al unui condensator.
Condensatorul are pe armături sarcinile:

$$q_1 = +q \text{ și } q_2 = -q \tag{4.9}$$

și potențialele V_1 și V_2 care satisfac relația:

$$V_1 - V_2 = U. \tag{4.10}$$

Din relația (4.8), rezultă energia:

$$W_e = \frac{1}{2}(V_1 q - V_2 q) = \frac{1}{2} \cdot q \cdot U. \tag{4.11}$$

Dacă se introduce expresia capacității $C = \frac{q}{U}$ se mai poate scrie:

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \cdot \tag{4.12}$$

Din aceste din urmă relații se poate spune: dacă se menține tensiunea constantă, energia condensatorului este proporțională cu capacitatea sa, iar dacă se menține sarcina constantă energia este invers proporțională cu capacitatea.

4.2. DENSITATEA DE VOLUM A ENERGIEI CÎMPULUI ELECTROSTATIC

Relația (4.8) exprimă energia în funcție de potențiale și de sarcini și nu specifică dacă ea este localizată pe conductoare sau în dielectric. Se caută deci exprimarea energiei în funcție de mărimile de stare ale cîmpului ($\overline{E}$ și $\overline{D}$).

Fie densitatea de volum a energiei dată de relația:

$$W'_e = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta W_e}{\Delta v} = \frac{\Delta W_e}{\mathrm{d}v}, \tag{4.13}$$

Δv fiind un element de volum, în cîmp.

Energia cuprinsă în volumul v va fi:

$$W_e = \int_v W'_e \cdot \mathrm{d}v. \tag{4.14}$$

În cazul particular al unui condensator plan, sarcina de pe o armătură este

$$q = \oint_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = D \cdot A, \tag{4.15}$$

Tensiunea electrică dintre armături este

$$U_{12} = \int_1^2 \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = E \cdot d. \tag{4.16}$$

Introducînd (4.15) și (4.16) în (4.11) rezultă expresia energiei cîmpului electric din condensatorul plan:

$$W_e = \frac{1}{2} D \cdot A \cdot E \cdot d = \frac{1}{2} D \cdot E \cdot v, \tag{4.17}$$

unde v este volumul dielectricului dintre armături.

Deoarece cîmpul electric al condensatorului plan (cu inel de gardă) este omogen, rezultă din (4.13) și (4.17) expresia densității de volum a energiei:

$$W'_e = \frac{W_e}{v} = \frac{1}{2} D \cdot E. \tag{4.18}$$

În cazul general, cînd vectorii $\overline{D}$ și $\overline{E}$ nu sînt coliniari, densitatea de volum a energiei capătă forma:

$$W'_e = \frac{1}{2}\overline{D} \cdot \overline{E}, \tag{4.18'}$$

care cu (2.25) se mai scrie:

$$W'_e = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2. \tag{4.19}$$

Cu (4.18), energia cîmpului electric (4.14) se scrie:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \overline{D} \cdot \overline{E} \cdot \mathrm{d}v. \tag{4.20}$$

Relația (4.20), care dă expresia energiei cîmpului electric, este cea mai generală formă și este valabilă și în medii anizotrope (dar liniare), precum și pentru sarcini variabile în timp. Totodată relațiile (4.18) și (4.19) precizează că energia cîmpului electric este localizată în dielectric (acolo unde există cîmp electric) și nu în corpuri conductoare (unde cîmpul este nul).

4.3. FORȚELE ELECTROSTATICE

Pentru distribuții de sarcină punctiformă forțele electrostatice se calculează cu formula lui Coulomb. În cazul general însă, asupra corpurilor se exercită forțe și momente care nu se pot calcula cu formula lui Coulomb. Ele se vor calcula (după cum se va vedea) plecînd de la expresia energiei cîmpului. Mai întîi trebuie introduse noțiunile de coordonate generalizate analog ca în mecanică, ele putînd fi: distanțe, unghiuri, suprafețe, volume etc., adică mărimi scalare ce caracterizează complet configurația geometrică a unui sistem de corpuri.

Variației unei coordonate generalizate îi corespunde un lucru mecanic virtual δL, dat de relația:

$$\delta L = X \cdot \mathrm{d}x, \tag{4.21}$$

în care X este forța generalizată, iar x este coordonata generalizată. Forțele și coordonatele generalizate, după relația (4.21), corespund astfel: dacă x este o distanță, X este o forță; dacă x este o suprafață, X este o tensiune superficială; dacă x este un volum, X este o presiune; dacă x este un unghi, X este moment; etc.

Aplicînd principiul conservării energiei, la variația sarcinii cu $\mathrm{d}q_i$ corespunde o creștere a energiei cîmpului precum și efectuarea unui lucru mecanic care modifică poziția corpurilor cu $\mathrm{d}x$:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot \mathrm{d}q_i = \mathrm{d}W_e + X \cdot \mathrm{d}x. \tag{4.22}$$

Se deosebesc două cazuri particulare în acest proces:
— potențialele corpurilor se păstrează constante;
— sarcinile corpurilor se păstrează constante.

Cînd *sarcinile sînt constante*, adică $dq_i = 0$, relația (4.22) conduce la:

$$X = -\frac{dW_e}{dx} = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right) q = \text{const.} \tag{4.23}$$

Acest caz corespunde situației în care corpurile încărcate cu sarcini sînt deconectate de la surse și sînt înconjurate numai de dielectrici.

Semnul minus se interpretează prin aceea că dacă X și dx sînt de același sens, energia sistemului scade. În adevăr dacă sursele sînt deconectate, deplasarea corpurilor se produce numai pe seama energiei interne a sistemului și deci această energie va scădea.

Dacă *potențialele sînt constante* ($V_i = \text{const.}$) relația (4.8) devine:

$$dW_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot dq_i, \tag{4.24}$$

care introdusă în (4.22) conduce la:

$$X = +\frac{dW_e}{dx} = +\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right) V = \text{const.} \tag{4.25}$$

Această situație corespunde cazului cînd sistemul este conectat la surse ($V = \text{const.}$) și deci deplasarea corpurilor are loc pe seama unui consum de energie de la sursă.

Relațiile (4.23) și (4.25) reprezintă cele *două teoreme ale forțelor generalizate în cîmp electrostatic.*

Aplicații

1. *Forța care se exercită între armăturile unui condensator*

Expresia energiei înmagazinată în cîmpul electric al condensatorului (relația 4.12) este:

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2. \tag{4.26}$$

Cînd sarcina se păstrează constantă, relația (4.23) conduce la:

$$X = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{C}\right) = -\frac{q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x}. \tag{4.27}$$

Cînd tensiunea se păstrează constantă, relația (4.25) conduce la:

$$X = +\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(CU^2) = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \tag{4.28}$$

Relațiile (4.27) și (4.28) sînt identice, deoarece $U^2 = \frac{q^2}{C^2}$.

2. *Electrometrul Thomson*

Este un instrument de măsură absolut, care măsoară tensiuni, cunoscînd numai mărimi mecanice. El constă (fig. 4.2) dintr-un condensator plan, cu inel de gardă pentru eliminarea efectului de margine. O placă este fixă, iar cealaltă este legată la brațul pîrghiei unei balanțe.

Balanța se dezechilibrează cînd greutatea G este mai mare decît forța de atracție dintre armături.

Echilibrul este dat de relația:

$$X + G = 0, \tag{4.29}$$

care cu (4.28) se scrie:

$$G = -\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}. \tag{4.30}$$

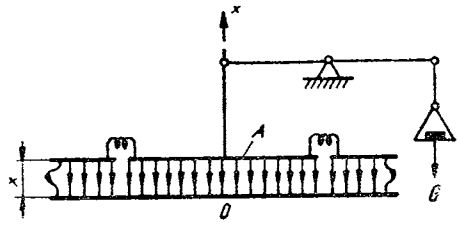


Fig. 4.2.

Expresia capacității condensatorului plan fiind $C = \frac{\varepsilon \cdot A}{x}$, relația (4.30) devine:

$$|G| = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot A}{2x^2}, \tag{4.31}$$

de unde se deduce expresia tensiunii:

$$U = \sqrt{\frac{2x^2}{\varepsilon \cdot A} \cdot |G|} = \sqrt{\frac{2x}{C}|G|}. \tag{4.32}$$

3. *Instrument de măsură electrostatic cu cadrane* (fig. 4.3)

Este constituit din două plăci fixe P_1 și o placă mobilă P_2 de care este prins un ac indicator. Sistemul mobil este ținut în echilibru de un resort spiral, care creează un moment rezistent proporțional cu unghiul de deviație:

$$M_r = K_1 \cdot \alpha. \tag{4.33}$$

Capacitatea dintre sistemul mobil și cel fix este o funcție de unghiul α, deci forța generalizată va fi un moment, dat de relația (4.28):

$$X = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial \alpha}. \tag{4.34}$$

Sistemul va fi la echilibru cînd cuplul rezistent devine egal cu cel motor, adică:

$$\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial \alpha} = K_1 \cdot \alpha. \tag{4.35}$$

Dacă dependența capacității în funcție de unghi ar fi liniară (ca de exemplu în figura 4.3), am avea $\frac{\partial C}{\partial \alpha} = K_2$ și relația (4.35) devine:

$$U^2 = \frac{2K_1}{K_2} \cdot \alpha \tag{4.36}$$

și se obține un instrument cu scala pătratică. Dacă dependența capacității în funcție de unghi este logaritmică, de forma $C = K_3 \ln \alpha + K_4$, relația (4.35) devine:

$$U^2 = \frac{2K_1}{K_3}\alpha^2, \tag{4.37}$$

sau

$$U = K \cdot \alpha \tag{4.38}$$

și se obține în acest caz o scală liniară a instrumentului.

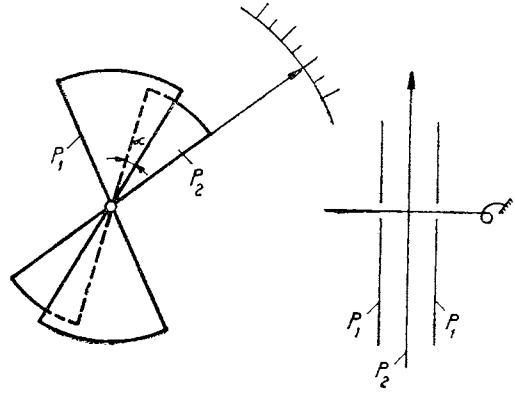


Fig. 4.3.

Asupra suprafeței corpurilor încărcate cu sarcină se exercită o forță, calculabilă prin egalarea variației energiei cîmpului la deplasarea ariei elementare dA cu distanța ds (fig. 4.4):

$$dW_e = \overline{dF} \cdot \overline{ds}. \tag{4.39}$$

Cu (4.13) se obține:

$$W_e' \cdot dv = dF \cdot ds \cos \alpha, \tag{4.40}$$

sau:

$$W_e' \cdot dA \cdot ds \cdot \cos \alpha = dF \cdot ds \cdot \cos \alpha. \tag{4.41}$$

Presiunea electrostatică va fi:

$$\frac{dF}{dA} = p = W_e'; \tag{4.42}$$

deci, asupra oricărei suprafețe conductoare se exercită din partea cîmpului o presiune egală cu densitatea de volum a energiei.

Forța este maximă cînd deplasarea se face pe direcția normală. După concepția lui Faraday liniile de cîmp nu sînt altceva decît materializarea direcțiilor după care se produce deplașarea în cîmp.

Exemplu

Asupra suprafeței unei sfere metalice încărcate cu sarcină (fig. 4.5), se exercită o presiune, calculabilă cu relația (4.42). Energia specifică calculată cu relația (4.19), cunoscînd valoarea intensității cîmpului (relația 1.69), este:

$$W_e' = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon q^2}{16\pi^2 \varepsilon^2 R^4}. \tag{4.43}$$

Presiunea electrostatică este deci:

$$p = W_e' = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon R^4}. \tag{4.44}$$

Aceasta tinde să mărească raza sferei, indiferent de semnul sarcinii, deoarece în relația (4.44) intervine mărimea q^2.

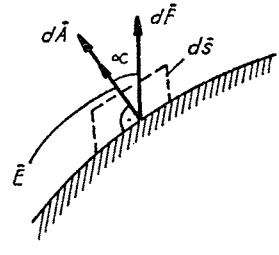


Fig. 4.4.

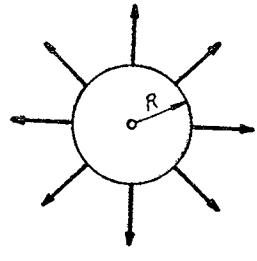


Fig. 4.5.

4.5. FORȚELE CARE SE EXERCITĂ LA SUPRAFAȚA DE SEPARAȚIE A DOUĂ MEDII DIELECTRICE

Fie două medii dielectrice cu permitivitățile ε_1 și ε_2, separate printr-o suprafață al cărei element de arie dA este reprezentat în figura 4.6. Vectorii cîmp electric și inducție electrică $(\overline{E}, \overline{D})$ suferă refracții, formînd cu normala unghiurile α_1 și α_2. Dacă mediile sînt izotrope, vectorii $\overline{E}$ și $\overline{D}$ sînt coliniari. Asupra suprafeței de separație se exercită presiuni electrostatice date de relația (4.42):

$$p = W'_e = \frac{1}{2}\overline{E} \cdot \overline{D}. \tag{4.45}$$

Pentru elementul de arie dA forțele sînt:

$$|dF_1| = p_1 \cdot dA\,; \qquad |dF_2| = p_2 \cdot dA. \tag{4.46}$$

Direcția forțelor formează, conform relației (4.45), unghiurile $2\alpha_1$ și $2\alpha_2$ cu normala la suprafața de separație. Se calculează componentele forțelor după direcția normală și tangențială la suprafață.

Forțele tangențiale vor fi:

$$\begin{aligned} dF_{1t} &= \frac{1}{2}\varepsilon_1 \cdot E_1^2 \cdot dA \sin 2\alpha_1 \\ dF_{2t} &= \frac{1}{2}\varepsilon_2 \cdot E_2^2 \cdot dA \sin 2\alpha_2 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Dezvoltînd sinusul argumentului dublu se obține:

$$\begin{aligned} dF_{1t} &= (\varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1) \cdot (E_1 \sin\alpha_1)\, dA \\ dF_{2t} &= (\varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2) \cdot (E_2 \sin\alpha_2)\, dA \end{aligned} \tag{4.48}$$

În relațiile (4.48) parantezele reprezintă componenta normală a inducției și respectiv componenta tangențială a cîmpului, deci:

$$\begin{aligned} dF_{1t} &= D_{1n} \cdot E_{1t} \cdot dA \\ dF_{2t} &= D_{2n} \cdot E_{2t} \cdot dA \end{aligned} \tag{4.49}$$

Conform teoremelor de refracție a liniilor de cîmp avem însă

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{și} \quad E_{1t} = E_{2t},$$

deci

$$dF_{1t} = dF_{2t}. \tag{4.50}$$

Această relație arată că asupra suprafeței de separație a două medii dielectrice *nu se exercită o forță rezultantă tangențială*, deoarece $dF_{1t} - dF_{2t} = 0$.

Forțele normale vor fi:

$$\begin{aligned} dF_{1n} &= \frac{1}{2}\varepsilon_1 \cdot E_1^2 \cdot \cos 2\alpha_1 \cdot dA \\ dF_{2n} &= \frac{1}{2}\varepsilon_2 \cdot E_2^2 \cdot \cos 2\alpha_2 \cdot dA \end{aligned} \tag{4.51}$$

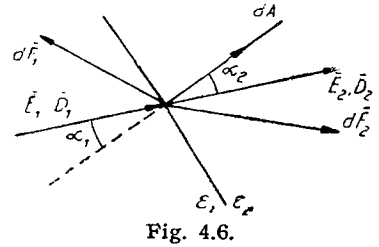


Fig. 4.6.

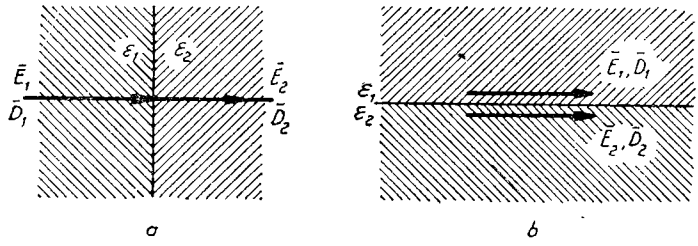


Fig. 4.7

Dezvoltînd cosinusul argumentului dublu rezultă:

$$\begin{aligned} dF_{1n} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot E_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 - \varepsilon_1 E_1^2 \cdot \sin^2 \alpha_1)\, dA \\ dF_{2n} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_2 \cdot E_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 - \varepsilon_2 E_2^2 \cdot \sin^2 \alpha_2)\, dA \end{aligned} \tag{4.52}$$

Introducînd componentele normale și tangențiale ale cîmpului electric și ale inducției electrice și ținînd cont de teoremele refracției, se obține *forța rezultantă* care acționează *normal la suprafața de separație* a doi dielectrici:

$$dF_n = dF_{1n} - dF_{2n} = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\left(E_t^2 + \frac{D_n^2}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}\right) dA. \tag{4.53}$$

Această forță este dirijată de la dielectricul cu ε mai mare către dielectricul cu ε mai mic.

Cazuri particulare

a) Dacă suprafața de separație este normală la direcția cîmpului (fig. 4.7, *a*), rezultă $E_t = 0$ și $D_1 = D_2 = D$, deci relația (4.53) devine:

$$dF_n = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2} D^2 \cdot dA. \tag{4.54}$$

b) Dacă suprafața de separație este tangentă la direcția cîmpului (fig. 4.7, *b*), rezultă $E_t = E_1 = E_2 = E$ și $D_n = 0$, și relația (4.53) devine:

$$dF_n = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E^2 \cdot dA. \tag{4.55}$$

Aplicație

Se consideră un condensator plan cu două medii dielectrice (ε_1 și ε_2) separate, ca în figura 4.8. Să se calculeze forța care tinde să deplaseze suprafața lor de separație.

Forța se poate calcula în cazul general cu relația (4.28), explicitînd capacitatea condensatorului:

$$C = \varepsilon_1 \cdot \frac{b(a - x)}{d} + \varepsilon_2 \cdot \frac{b \cdot x}{d}, \qquad (4.56)$$

unde $a \cdot b$ este suprafața armăturii. Din (4.56) se deduce:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{b}{d}, \qquad (4.57)$$

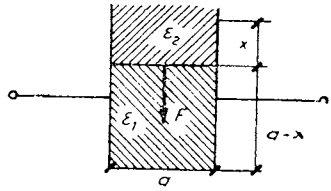


Fig. 4.8

apoi forța rezultă din (4.28):

$$F = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{U^2}{2d} \cdot b. \qquad (4.58)$$

Observînd însă, că avem cazul din figura 4.7, *b*, în relația (4.55) introducînd valorile $E = \frac{U}{d}$ și $\int dA = d \cdot b$, se obține aceeași forță ca și în (4.58).

CAPITOLUL 5

TENSIUNE ELECTROMOTOARE. CÎMPURI IMPRIMATE

Un sistem de conductoare se află în regim electrocinetic, dacă acestea sînt parcurse de curenți de conducție, adică sarcinile se deplasează ordonat în raport cu un reper. Regimul în care stările electrocinetice nu sînt variabile în timp se numește regim electrocinetic staționar.

Conductoarele prin care pot circula curenți electrici în regim staționar se împart în două categorii: conductoare de prima speță (metale, semiconductoare), în care circulația sarcinilor nu este însoțită de reacții chimice (conducția este electronică) și conductoare de speța a doua (electroliții) în care conducția este ionică și la trecerea curentului electric se produc reacții chimice.

5.1. TENSIUNE ELECTROMOTOARE (t.e.m.)

Apariția curentului electric se datorează unei forțe neelectrice care acționează asupra sarcinilor electrice. Raportul dintre forța neelectrică și sarcina asupra căreia acționează se numește *cîmp electric imprimat* (relația 2.35):

$$\frac{\bar{F}_{neel}}{q} = \bar{E}_i. \tag{5.1}$$

Pentru ca sarcinile să fie puse în mișcare e necesar să existe relația (vezi și par. 2.6):

$$\bar{E} + \bar{E}_i \neq 0. \tag{5.2}$$

Această forță rezultantă efectuează un lucru mecanic la deplasarea sarcinilor.

Prin definiție se numește *tensiune electromotoare* integrala de linie

$$e = \oint_\Gamma (\bar{E} + \bar{E}_i) \cdot \overline{\mathrm{ds}}, \tag{5.3}$$

care este numeric egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă pentru deplasarea sarcinii unitate pe conturul închis Γ. Dacă conturul Γ este situat numai în medii conductoare, în regim electrostatic avem îndeplinită condiția de echilibru electrostatic (2.37):

$$\bar{E} + \bar{E}_i = 0. \tag{5.4}$$

Se consideră o pilă electrică (fig. 5.1) în două situații: comutatorul K închis (regim electrocinetic) și comutatorul K deschis (regim electrostatic).

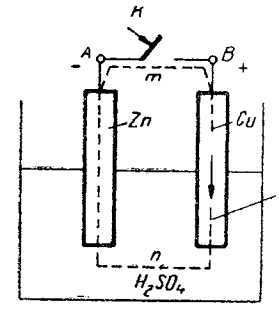


Fig. 5.1

Dacă comutatorul K *este închis*, conturul Γ se află în întregime în conductor și integrala (5.3) este diferită de zero:

$$\oint_\Gamma (\bar{E} + \bar{E}_i) \cdot \overline{\mathrm{d}s} \neq 0, \tag{5.5}$$

deoarece există o circulație de sarcini (se stabilește un regim electrocinetic).

Dacă comutatorul K *este deschis*, rezultă din nou:

$$\oint_\Gamma (\bar{E} + \bar{E}_i) \cdot \overline{\mathrm{d}s} \neq 0, \tag{5.5'}$$

deoarece drumul de integrare nu trece în întregime prin conductoare, deci nu se poate impune condiția (5.4) de echilibru electrostatic.

În ambele situații descrise, integrala (5.5) și (5.5') se poate calcula și ea reprezintă tensiunea electromotoare a pilei electrice.

Considerînd K deschis, se descompune integrala într-o sumă de două integrale, astfel:

$$e = \int_{AmB} (\bar{E} + \bar{E}_i) \cdot \overline{\mathrm{d}s} + \int_{BnA} (\bar{E} + \bar{E}_i) \cdot \overline{\mathrm{d}s}. \tag{5.6}$$

În ipoteza făcută (K este deschis) sistemul se află în regim electrostatic pentru care în conductoare este valabilă relația (5.4). A doua integrală din (5.6) fiind în mediu conductor rezultă că este nulă. În prima integrală nu poate exista cîmp imprimat deoarece ea se efectuează în vid, unde există numai cîmp electrostatic. Cu aceste observații tensiunea electromotoare este

$$e = \int_{AmB} \bar{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = U_{AB}, \tag{5.7}$$

deci *tensiunea electromotoare a unei surse este tensiunea măsurată între bornele sale, la mersul în gol al acesteia* (comutatorul K este deschis).

Un alt mod de calcul constă în descompunerea integralei (5.5) sub forma:

$$e = \oint_\Gamma \bar{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} + \oint_\Gamma \bar{E}_i \cdot \overline{\mathrm{d}s}. \tag{5.8}$$

Prima din integrale este nulă deoarece $\bar{E}$ este un cîmp coulombian, rămîne deci:

$$e = \oint_\Gamma \bar{E}_i \cdot \overline{\mathrm{d}s} = \int_{AmB} \bar{E}_i \cdot \overline{\mathrm{d}s} + \int_{BnA} \bar{E}_i \cdot \overline{\mathrm{d}s}. \tag{5.9}$$

Prima integrală din a doua egalitate este nulă deoarece pe drumul AmB nu avem cîmp imprimat, neexistînd neonomogenităţi, deci în final expresia tensiunii electromotoare se scrie sub forma:

$$e = \oint_{BnA} \bar{E}_i \cdot \overline{\mathrm{d}s}, \tag{5.10}$$

care arată că tensiunea electromotoare este produsă numai de cîmpul imprimat şi *este localizată* în porţiunea unde există cîmp imprimat (în cazul de faţă pe conturul BnA unde se află neomogenităţi datorită prezenţei unor conductoare de specii diferite aflate în contact).

În cazul general al regimului nestaţionar, apare şi cîmpul electric indus care este un *cîmp solenoidal* $\bar{E}_s$, produs de variaţia în timp a fluxului magnetic (vezi cap. 10) a cărui circulaţie nu este nulă, deci tensiunea electromotoare în regim nestaţionar este dată de suma:

$$e = \oint_{\Gamma} \bar{E}_i \cdot \overline{\mathrm{d}s} + \oint_{\Gamma} \bar{E}_s \cdot \overline{\mathrm{d}s} = \oint_{\Gamma} (\bar{E}_i + \bar{E}_s)\, \overline{\mathrm{d}s}. \tag{5.11}$$

5.2. CÎMPURI IMPRIMATE

După cum s-a arătat, t.e.m. reprezintă o mărime fizică care produce curent electric în circuite, deci efectuează un lucru mecanic. Acest lucru mecanic este transmis de la un „motor" care transformă o formă de energie în energie electrică. Din punctul nostru de vedere energia este primită prin intermediul cîmpului imprimat $\bar{E}_i$, care este o mărime fictivă (de calcul). Cîmpurile imprimate se clasifică în două categorii: cîmpuri imprimate de volum şi cîmpuri de suprafaţă (de contact).

5.2.1. Cîmpuri imprimate de volum

Acestea la rîndul lor pot fi: cîmpuri imprimate de acceleraţie; cîmpuri imprimate de difuzie (de concentraţie); cîmpuri imprimate termoelectrice de volum etc.

Cîmpul imprimat de acceleraţie (fig. 5.2) apare dacă se roteşte un disc metalic cu viteza ω. Electronii supuşi forţei centrifuge se deplasează spre periferie, asupra lor acţionînd o forţă neelectrică:

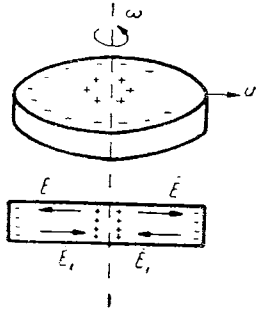


Fig. 5.2.

$$\bar{F}_{neel} = m_0 \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \bar{u}. \tag{5.12}$$

Această forţă determină cîmpul imprimat

$$\bar{E}_i = \frac{\bar{F}_{neel}}{q} = -\frac{m_0 \cdot r \cdot \omega^2}{q_0}\, \bar{u}, \tag{5.13}$$

în care q_0 este sarcina electronului, iar m_0 este masa sa. Deplasarea electronilor spre periferie se face pînă cînd cîmpul electrostatic $\bar{E}$ al sarcinilor echilibrează cîmpul imprimat, adică este îndepli-

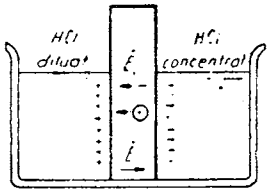


Fig. 5.3.

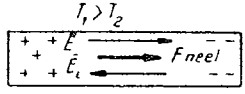


Fig. 5.4.

nită condiția de echilibru electrostatic ($\bar{E} + \bar{E}_i = 0$), deoarece ne aflăm într-un mediu conductor.

Cîmpul imprimat de concentrație (difuzie) apare într-un vas cu soluții de concentrații diferite, despărțite printr-un perete poros (fig. 5.3). Se produce o difuzie prin peretele poros, care tinde să egalizeze concentrațiile electrolitului din cele două despărțituri. Prin perete vor tinde să treacă din soluția concentrată atît H^+ cît și Cl^-, dar mobilitatea celor doi ioni nu este la fel de mare și trece mai ușor H^+. Se obține în final o încărcare pozitivă a soluției diluate și una negativă a celei concentrate. Această încărcare cu sarcină echivalează cu un cîmp imprimat.

Apare astfel și un cîmp electrostatic care oprește difuzia cînd este îndeplinită condiția de echilibru electrostatic ($\bar{E}_i + \bar{E} = 0$).

Cîmpul imprimat termoelectric de volum (fig. 5.4) apare în situația care se încălzește neuniform un metal. Asupra electronilor se exercită o forță medie neelectrică, datorită necompensării ciocnirilor. Cîmpul imprimat este raportul dintre această forță și sarcina electronului. El este dirijat spre temperatura mai mare, deoarece electronii (cu sarcini negative) difuzează în partea în care temperatura e mai joasă.

5.2.2. Cîmpuri imprimate de contact

Aceste cîmpuri sînt localizate în stratul de neomogenitate foarte subțire care separă două conductoare diferite puse în contact. Ele sînt în general foarte intense, comparativ cu cele de volum. Cîmpurile imprimate de contact sînt caracterizate prin integrala:

$$e_{12} = \int_1^2 \bar{E}_i \cdot \overline{\mathrm{d}s}, \tag{5.14}$$

în care drumul de integrare *1—2* este extrem de mic (fig. 5.5).

Aceste cîmpuri pot fi de mai multe feluri: cîmpuri imprimate voltaice; cîmpuri imprimate termoelectrice de contact; cîmpuri imprimate galvanice; cîmpuri imprimate fotovoltaice etc.

Cîmpurile imprimate voltaice apar la contactul a două metale diferite fără a fi încălzite la temperaturi diferite. Tensiunea electromotoare voltaică depinde atît de temperatură cît și de natura metalelor aflate în contact.

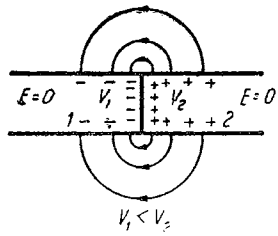


Fig. 5.5.

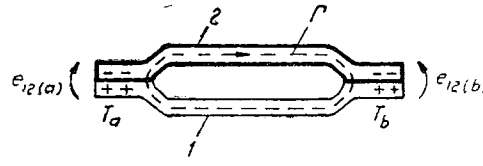


Fig. 5.6.

Se consideră şirul următor de elemente:
(+) Al, Sn, Zn, Cd, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, (—) numit seria voltaică. În acest şir orice conductor adus în contact cu cel care îl precede se încarcă pozitiv, iar în contact cu cel care îl urmează se încarcă negativ.

Dacă se construieşte un circuit închis cu mai multe conductoare din acest şir, toate aflate la aceeaşi temperatură, rezultă $\oint_\Gamma \vec{E}_i \cdot \overline{ds} = 0$, deci prin acest procedeu nu se poate obţine un curent electric întrucît nu se introduce energie din exterior în sistem.

Pentru a se obţine un lucru mecanic, adică pentru a avea $\oint_\Gamma \vec{E}_i \cdot \overline{ds} \neq 0$, există următoarele posibilităţi: realizarea de temperaturi neuniforme; introducerea în circuit a unor conductoare de speţa a doua, care poduc reacţii chimice şi deci degajă energie; excitarea cu anumiţi agenţi exteriori (de exemplu cu lumină sau alte radiaţii).

Cîmpurile imprimate termoelectrice de contact (efectul Seebeck) apar în situaţia cînd două metale diferite *1* şi *2* se află în contact în două puncte *a* şi *b* (fig. 5.6) şi aceste contacte se află la temperaturi diferite ($T_a \neq T_b$). La suprafaţa de contact apar tensiuni electromotoare diferite, în funcţie de temperatura contactului respectiv:

$$e_{12a} = f(T_a) \neq e_{12b} = f(T_b). \tag{5.15}$$

Făcînd integrala pe conturul închis Γ, rezultă t.e.m.:

$$e = \oint_\Gamma \vec{E}_i \cdot \overline{ds} = e_{12a} - e_{12b} \neq 0. \tag{5.16}$$

Această tensiune electromotoare este diferită de zero numai dacă $T_a \neq T_b$.

Circuitul din figura 5.6 se numeşte termocuplu şi se utilizează în practică pentru determinarea diferenţei de temperatură între cele două puncte de contact ($\Delta T = T_a - T_b$), prin măsurarea tensiunii electromotoare cu un milivoltmetru (fig. 5.7, *a*). În practică se folosesc diverse termocupluri, date în tabelul 5.1.

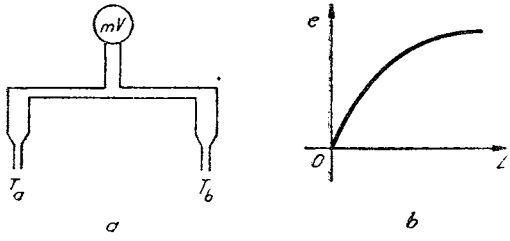


Fig. 5.7.

Tabelul 5.1

Timpul termocuplului	Limita maximă de temperatură	Tensiunea electromotoare pentru $\Delta T = 100°C$
Constantan — cupru	500°C	5 mV
Constantan — cromnichel	900°C	6,2 mV
Nichel — cromnichel	1 000°C	4,1 mV
Wolfram — Wolframmolibden	3 000°C	0,3 mV

Trebuie avut în vedere că tensiunea electromotoare nu variază liniar în funcție de ΔT, ci după o curbă, aproximativ ca în figura 5.7, *b*.

Cîmpurile imprimate galvanice apar la suprafața de contact a două conductoare de specii diferite.

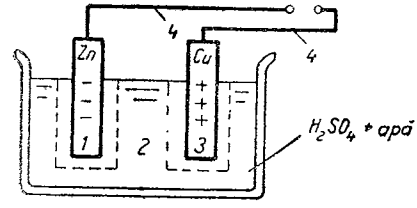


Fig. 5.8.

Se consideră un vas cu soluție de acid sulfuric, în care se introduc două metale diferite (fig. 5.8) de exemplu zinc și cupru. Dacă se consideră un circuit Γ închis prin conductoarele de speța întîi (conductoarele *1*, *3* și *4*) cît și prin conductorul *2* (soluția), de speța a doua, rezultă t.e.m. de contur:

$$e = \oint_{\Gamma} \bar{E}_i \cdot \overline{ds} = e_{12} + e_{23} + e_{34} + e_{41} \neq 0. \tag{5.17}$$

Ultimii doi termeni îndeplinesc condiția, $e_{34} + e_{41} = e_{31}$, (5.18)

deci rezultă:

$$e = e_{12} + e_{23} + e_{31}. \tag{5.19}$$

Aceasta este tensiunea electromotoare a elementului galvanic.

La introducerea metalului (Zn sau Cu) în soluție, există două tendințe: dizolvarea metalului în soluție și *presiunea osmotică* (opusă dizolvării). Corespunzător acestor două tendințe, pot apare două situații: dacă presiunea de dizolvare este mai mare decît presiunea osmotică, ionii pozitivi trec din metal în soluție și metalul rămîne încărcat negativ (cazul zincului); dacă presiunea de dizolvare este mai mică decît cea osmotică fenomenul se petrece invers, iar metalul se încarcă pozitiv (cazul cuprului).

Tensiunile electromotoare care apar între electrozi și soluție se numesc „tensiuni de electrod". Tensiunile de electrod au ca referință electrodul normal de hidrogen, al cărui potențial se consideră nul. Tensiunile de electrod se măsoară între un electrod de metal scufundat într-o soluție a unei sări a acelui metal. Trebuie observat că în elementul galvanic reprezentat schematic în figura 5.8, electrozii sînt înconjurați de cîte un perete poros care permite separarea celor două soluții de sare a electrozilor (figurați punctat). În tabela 5.2 sînt date tensiunile de electrod pentru cîteva metale mai des utilizate în construirea pilelor galvanice.

De exemplu, pentru pila galvanică din figura 5.8 (Zn şi Cu), t.e.m. (rel. 5.19) are valoarea calculată conform tabelului 5.2 (se neglijează t.e.m. negalvanică e_{31} din 5.19):

$$e = +0{,}34 - (-0{,}77) = 1{,}11 \text{ V}. \tag{5.20}$$

Tabelul 5.2.

Metalul	Tens. de electrod [V]	Metalul	Tens. de electrod [V]
Zinc	−0,77	Hidrogen	0
Fier	−0,43	Cupru	+0,34
Cadmiu	−0,42	Mercur	+0,76
Nichel	−0,23	Argint	+0,80
Plumb	−0,15	Platină	+1,2
Staniu	−0,14	Aur	+1,7

Cîmpurile imprimate fotovoltaice apar la suprafaţa de separaţie a unui semiconductor cu un metal sub acţiunea luminii. Electronii „scoşi" din semiconductor datorită radiaţiei luminoase sînt trecuţi în metal, din cauza proprietăţii joncţiunii de a conduce unidirecţional. Acest fenomen echivalează cu o forţă neelectrică, deci un cîmp imprimat. Se obţin prin acest procedeu aşa-zisele fotoelemente, utilizate mai ales în aeronautică.

5.3. CURENTUL ELECTRIC ÎN REGIM STAŢIONAR

Regimul electrocinetic staţionar se stabileşte în circuite închise formate din conductoare (de prima speţă sau de a doua speţă) care au sarcini electrice libere şi care se deplasează ordonat într-un singur sens cu o viteză medie constantă, sub acţiunea forţei rezultante $(\bar{E} + \bar{E}_i)$ diferită de zero.

Starea electrocinetică poate fi pusă în evidenţă prin efectele pe care le produce, dintre care cele mai importante sînt:

a) efectele mecanice (două conductoare parcurse de curenţi electrici se atrag sau se resping în funcţie de sensul curenţilor; o bobină parcursă de curent atrage în interiorul său piese din fier);

b) efectele chimice (la trecerea unui curent electric printr-o baie electrolitică se produce electroliza, însoţită de reacţii chimice);

c) efectele calorice (conductoarele parcurse de curenţi se încălzesc);

d) efectele luminoase (la trecerea curentului electric prin filamentul lămpilor electrice acestea luminează).

Unele din aceste efecte (cele mecanice sau cele chimice) depind de sensul de circulaţie al sarcinilor, deci conductoarele respective prezintă „polaritate". Efectele calorice sau luminoase (parte din ele) nu depind de sensul de circulaţie al sarcinilor.

5.3.1. Curentul electric de conducție

Pentru a caracteriza cantitativ starea electrocinetică se face apel la o mărime scalară:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \tag{5.21}$$

numită *intensitatea curentului electric de conducție*, care reprezintă suma sarcinilor electrice libere (Δq) ce traversează secțiunea conductorului în intervalul de timp Δt. Sensul intensității curentului electric este dat de *sensul deplasării sarcinilor pozitive* (invers cu sensul deplasării sarcinilor negative).

În sistemul internațional unitatea de măsură a intensității curentului electric este *amperul*, iar în sistemul C.G.S. μ_0, avem 1 Biot = 10 A.

Pentru caracterizarea locală a stării electrocinetice se folosește mărimea vectorială $\bar{J}$, definită astfel încît să existe relația:

$$i = \int_S \bar{J} \cdot \mathrm{d}\bar{A}, \tag{5.22}$$

adică intensitatea curentului electric (curent electric) este fluxul acestui vector printr-o suprafață oarecare prin care se deplasează sarcinile.

Mărimea vectorială $\bar{J}$ se numește densitate de curent și se măsoară în amper pe metru pătrat (A/m^2).

În cazul *conductoarelor filiforme* (fig. 5.9) se definește o densitate de curent scalară, pentru fiecare secțiune înclinată cu unghiul α față de secțiunea transversală A_0:

$$J_\alpha = \frac{i}{A_\alpha}. \tag{5.23}$$

Curentul i este constant, dar A_α variază în funcție de α. Pentru o secțiune A_0 normală la conductor rezultă:

$$J_0 = \frac{i}{A_0}. \tag{5.24}$$

Din (5.23) și (5.24) se obține:

$$i = J_\alpha \cdot A_\alpha = J_0 A_0, \tag{5.25}$$

apoi densitatea de curent rezultă:

$$J_\alpha = J_0 \cos \alpha. \tag{5.26}$$

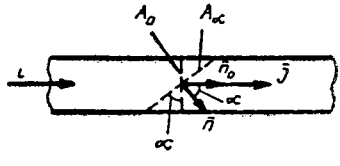


Fig. 5.9.

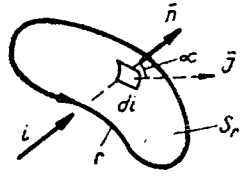


Fig. 5.10

Această relație arată că densitatea scalară este componenta unui vector J, avînd direcția locală după direcția curentului. Se poate scrie deci:

$$J_\alpha = \bar{J} \cdot \bar{n}, \tag{5.27}$$

Pentru *conductoare masive* (fig. 5.10) curentul elementar se scrie:

$$di = \bar{J} \cdot d\bar{A}, \tag{5.28}$$

care prin integrare devine:

$$i = \int_{S_\Gamma} \bar{J} \cdot d\bar{A} = \int_{S_\Gamma} \bar{J} \cdot \bar{n} \cdot dA, \tag{5.29}$$

Sensul normalei la suprafață se asociază după regula burghiului drept, în funcție de sensul de parcurgere al conturului Γ.

5.3.2. Curentul electric de convecție

Curentul electric definit de relația (5.21), numit „de conducție", se datorește deplasării relative a sarcinilor electrice față de reperul fix ales și anume, față de conductor. Există în regim staționar și un curent electric *de convecție* sau *de transport* care se datorește deplasării întregului corp încărcat cu sarcină electrică, față de un reper fix.

Se consideră (fig. 5.11) o porțiune de conductor încărcată cu sarcina volumetrică ρ_V și care se deplasează cu viteza $\bar{v}$. Avînd elementele din figură, volumul porțiunii considerate va fi:

$$\Delta V = \Delta A \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha. \tag{5.30}$$

Sarcina cuprinsă în acest volum este:

$$\Delta q = \rho_V \cdot \Delta V = \rho_V \cdot \Delta A \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha. \tag{5.31}$$

Curentul de convecție care trece prin elementul dA va fi analog cu relația (5.21):

$$di_v = \frac{d(\Delta q)}{\Delta t} = \rho_V \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} dA \cos \alpha, \tag{5.32}$$

sau:

$$di_v = \rho_V \cdot v \cdot dA \cos \alpha = \rho_V \cdot \bar{v} \cdot \overline{dA}. \tag{5.33}$$

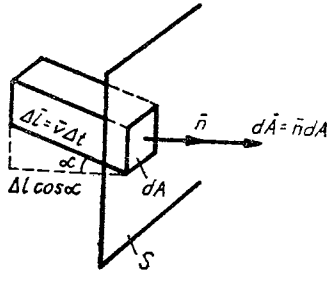


Fig. 5.11.

Prin integrare, intensitatea *curentului de convecție* este:

$$i_v = \int_S \rho_V \cdot \bar{v} \cdot \overline{dA}. \tag{5.34}$$

Făcînd analogia cu relația (5.22), *densitatea curentului de convecție* $\bar{J}_v$ va fi:

$$\bar{J}_v = \rho_V \cdot \bar{v}. \tag{5.35}$$

CAPITOLUL 6

UNELE LEGI GENERALE ŞI DE MATERIAL. PARTICULARIZĂRI

Se prezintă în continuare următoarele legi (în care intervin mărimi de stare ale cîmpului electrocinetic): legea conservării sarcinii electrice libere, legea conducţiei electrice, legea transformării energiei în conductoare şi legea electrolizei.

6.1. LEGEA CONSERVĂRII SARCINII

Aceasta este o lege de legătură între mărimi din electrostatică şi mărimi din electrocinetică. În regim electrostatic era valabilă relaţia $\Sigma q_k = \text{const.}$, adică sarcinile de pe conductoare se conservă.

În regim electrocinetic, considerînd sistemul format dintr-un condensator încărcat şi un fir conductor (fig. 6.1), la închiderea întreruptorului K, sarcinile se deplasează astfel încît prin suprafaţa Σ va circula un curent electric. Intensitatea curentului electric va fi dată de relaţia:

$$i_\Sigma = -\frac{\mathrm{d}q_\Sigma}{\mathrm{d}t}. \tag{6.1}$$

Această relaţie reprezintă *legea conservării sarcinii* şi se enunţă astfel: *intensitatea curentului electric* i_Σ *de conducţie, care iese dintr-o suprafaţă închisă* Σ, *este în fiecare moment egală cu viteza de scădere a sarcinii* q_Σ *aflată în interiorul suprafeţei.* Relaţia (6.1) reprezintă forma integrală a legii conservării sarcinii (vezi şi par. 5.3), valabilă în cazul general al regimului variabil.

Ea se poate stabili şi sub formă locală dacă se consideră sarcina cu distribuţia volumetrică ρ_v. În acest caz se poate scrie:

$$\oint_\Sigma \overline{J} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_\Sigma} \rho_V \cdot \mathrm{d}V, \tag{6.2}$$

sau:

$$-\oint_\Sigma \overline{J} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \int_{V_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \cdot \mathrm{d}V + \int_\Sigma \rho_v \cdot \overline{\mathrm{d}A} \cdot \overline{v}. \tag{6.3}$$

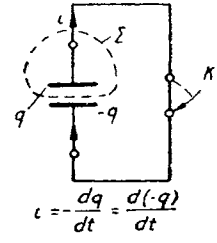


Fig. 6.1.

Trecînd în membrul întîi integrala dublă, se obține:

$$-\oint_{\Sigma} (\bar{J} + \rho_V \bar{v}) \cdot \overline{dA} = \int_{V_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \cdot dV, \tag{6.4}$$

și transformînd integrala dublă într-o integrală triplă (teorema lui Gauss-Ostrogradski):

$$-\int_{V_\Sigma} \operatorname{div}(\bar{J} + \rho_v \cdot \bar{v}) dV = \int_{V_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \cdot dV, \tag{6.5}$$

rezultă în final relația:

$$-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \operatorname{div}(\bar{J} + \rho_V \cdot \bar{v}). \tag{6.6}$$

Aceasta este forma locală a legii conservării sarcinii.

În regim staționar (curent continuu), unde mărimile nu variază în timp, este valabilă relația:

$$i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt} = 0. \tag{6.7}$$

Această relație reprezintă *teorema continuității* liniilor de curent, adică (fig. 6.2) *intensitatea curentului electric ce trece printr-o suprafață închisă este nulă* (curentul care iese este egal cu cel care intră; nu are început și sfîrșit, circulă pe un contur închis).

Această teoremă are următoarea consecință: la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate între doi conductori, vectorul $\bar{J}$ suferă o refracție. Scriind fluxul prin suprafața închisă Σ (fig. 6.3) de forma unui cilindru foarte plat (aria bazei mult mai mare decît aria laterală), din (6.7) se obține:

$$\oint_{\Sigma} \bar{J} \cdot \overline{dA} = J_1 \cos \alpha_1 \cdot \Delta A - J_2 \cos \alpha_2 \cdot \Delta A = 0, \tag{6.8}$$

sau:

$$J_{1n} = J_{2n}, \tag{6.9}$$

adică componentele normale ale vectorului densității de curent se conservă.

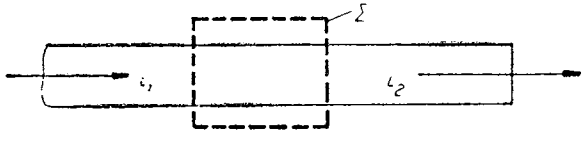


Fig. 6.2.

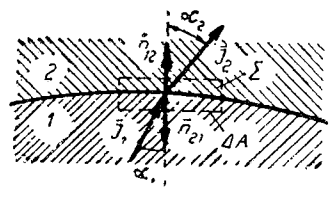


Fig. 6.3.

Aceasta este o lege de material, deoarece în formularea ei intervine o constantă care depinde de material. Ea reprezintă o generalizare a condiției de echilibru electrostatic (2.37). În regim electrocinetic avînd deplasare ordonată de sarcini, rezultă $\bar{E} + \bar{E}_i \neq 0$.

Se constată experimental că această sumă $(\bar{E} + \bar{E}_i)$ produce deplasarea sarcinilor, determinînd un curent de conducție a cărui densitate este proporțională cu $(\bar{E} + \bar{E}_i)$, adică:

$$\bar{E} + \bar{E}_i = \rho \cdot \bar{J}. \tag{6.10}$$

Aceasta este *forma locală a legii conducției electrice*, unde ρ se numește *rezistivitate* și depinde atît de material cît și de temperatura sa, după relația:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha \cdot \Delta T). \tag{6.11}$$

Coeficientul de temperatură al rezistenței α poate fi atît pozitiv cît și negativ. Pentru metale α este pozitiv, pentru cărbune sau pentru soluții α este negativ, iar pentru semiconductoare este foarte mare în modul, dar negativ.

Pentru unele metale (plumb aproape de zero absolut) ρ scade brusc și metalul se spune că este supraconductor.

În conductoare omogene unde nu există cîmp imprimat relația (6.10) devine:

$$\bar{E} = \rho \cdot \bar{J}. \tag{6.12}$$

Dacă se notează $\sigma = \frac{1}{\rho}$, relația (6.10) se mai scrie:

$$\bar{J} = \sigma \cdot (\bar{E} + \bar{E}_i), \tag{6.13}$$

sau pentru conductoare omogene:

$$\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E}. \tag{6.14}$$

Coeficientul σ se numește *conductivitate*. *Forma integrală a legii conducției* se referă la circuite filiforme pentru care $\bar{J}$ este constant în toate punctele unei secțiuni transversale (fig. 6.4), deci:

$$J = \frac{i}{A}. \tag{6.15}$$

Înmulțind relația (6.10) cu $\overline{ds}$ și integrînd pe conturul C între punctele *1* și *2*, între care există o neomogenitate (avem $\bar{E}_i \neq 0$), rezultă:

$$\int_1^2 (\bar{E} + \bar{E}_i)\,\overline{ds} = \int_1^2 \rho \cdot \bar{J} \cdot \overline{ds}. \tag{6.16}$$

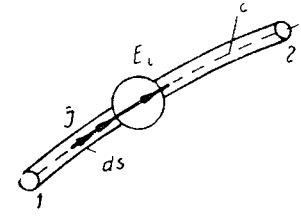


Fig. 6.4

Ţinînd cont că $\bar{J} \| \overline{ds}$, din (6.15) şi (6.16) se obţine:

$$\int_1^2 \bar{E} \cdot \overline{ds} + \int_1^2 \bar{E}_i \cdot \overline{ds} = \int_1^2 \rho \cdot \frac{i}{A} \cdot ds, \tag{6.17}$$

sau:

$$u_{12} + e_{12} = i \cdot \int_1^2 \rho \cdot \frac{ds}{A}. \tag{6.18}$$

Integrala din membrul drept se numeşte *rezistenţă electrică* şi se notează cu R_{12}, măsurîndu-se în ohm (Ω). Se obţine *legea conducţiei* sub forma integrală:

$$u_{12} + e_{12} = i \cdot R_{12} \tag{6.19}$$

În cazul în care conturul C ar fi închis avem $\oint_\Gamma \bar{E} \cdot \overline{ds} = 0$, deci relaţia (6.19) devine:

$$e = R \cdot i, \tag{6.20}$$

unde R este rezistenţa electrică a conturului închis Γ.

În cazul conductoarelor omogene avem $\bar{E}_i = 0$, deci $e = 0$, şi (6.19) se scrie:

$$u = R \cdot i, \tag{6.21}$$

relaţie stabilită experimental de O h m.

Pentru un conductor omogen şi de secţiune constantă, rezistenţa electrică se calculează astfel:

$$R = \int_1^2 \rho \frac{ds}{A} = \rho \frac{l}{A}, \tag{6.22}$$

unde l este lungimea conductorului. Din această relaţie se deduce unitatea de măsură a rezistivităţii ρ: ohm-metru (Ω · m).

În tabelul 6.1. se dau constantele mai importante pentru cîteva materiale mai des utilizate.

Tabelul 6.1.

Materialul	ρ [Ω · m]	σ [Ω^{-1} · m^{-1}]	α [grad^{-1}]
Argint	$0{,}016 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{7}$	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$
Cupru	$0{,}0175 \cdot 10^{-6}$	$5{,}7 \cdot 10^{7}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$
Aluminiu	$0{,}029 \cdot 10^{-6}$	$3{,}4 \cdot 10^{7}$	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$
Cărbune	$70 \cdot 10^{-6}$	$1{,}7 \cdot 10^{4}$	$-0{,}6 \cdot 10^{-3}$
Fier	$0{,}12 \cdot 10^{-6}$	$0{,}9 \cdot 10^{7}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$
Nichelină	$0{,}43 \cdot 10^{-6}$	$2{,}33 \cdot 10^{7}$	$0{,}13 \cdot 10^{-3}$
Constantan	$0{,}49 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{6}$	$-0{,}05 \cdot 10^{-3}$
Apă distil.	$2 \cdot 10^{+4}$	$0{,}5 \cdot 10^{-4}$	—

6.3. LEGEA TRANSFORMĂRII ENERGIEI ÎN CONDUCTOARE (LEGEA LUI JOULE–LENZ)

Aceasta este o lege generală și ea dă expresia energiei cedate de către cîmpul electromagnetic în unitatea de timp și pe unitate de volum. Expresia legii sub formă locală este

$$p = \bar{E} \cdot \bar{J}, \tag{6.23}$$

adică, puterea cedată de cîmpul electromagnetic în unitatea de volum (watt pe metru cub) a unui conductor în procesul conducției electrice este egală cu produsul scalar al vectorilor $\bar{E}$ și $\bar{J}$.

Acestei legi i se poate da formal următoarea demonstrație: puterea cedată în volumul V fiind

$$P = \int_V p \cdot \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}, \tag{6.24}$$

rezultă:

$$p = \frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}V \cdot \mathrm{d}t} = \frac{\overline{\mathrm{d}F} \cdot \overline{\mathrm{d}s}}{\mathrm{d}V \cdot \mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q \cdot \bar{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s}}{\mathrm{d}V \cdot \mathrm{d}t}. \tag{6.25}$$

Pentru o distribuție volumetrică de sarcină $\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} = \rho_V\right)$, rezultă din (6.25) cu $\bar{v} = \frac{\overline{\mathrm{d}s}}{\mathrm{d}t}$:

$$p = \rho_V \cdot \bar{E} \cdot \bar{v}, \tag{6.26}$$

apoi cu (5.35):

$$p = \bar{E} \cdot \bar{J}. \tag{6.27}$$

Forma integrală a legii Joule—Lenz se obține pentru un conductor filiform. Integrînd (6.23) pentru întreg volumul conductorului se obține puterea P în watt:

$$P = \int_V p \cdot \mathrm{d}V = \int_V \bar{E} \cdot \bar{J} \cdot \mathrm{d}V, \tag{6.28}$$

sau:

$$P = \int_1^2 \bar{E} \cdot \bar{J} \cdot \bar{A} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = \int_1^2 \bar{E} \cdot i \cdot \overline{\mathrm{d}s} = i \cdot \int_1^2 \bar{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} \tag{6.29}$$

În final rezultă:

$$P = i \cdot u_{12}, \tag{6.30}$$

care reprezintă *forma integrală* a legii lui Joule—Lenz.

Utilizînd (6.19) (renunțînd la indici) din (6.30) se obține:

$$P = R \cdot i^2 - e \cdot i. \tag{6.31}$$

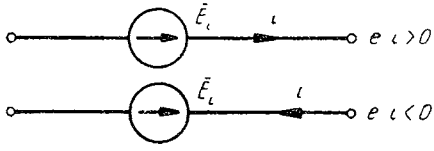


Fig. 6.5.

Primul termen din membrul drept al relației (6.31) este tot timpul pozitiv (nu depinde de sensul curentului din conductor) și reprezintă puterea electrică care se transformă ireversibil în căldură, încălzind conductoarele.

Al doilea termen $(e \cdot i)$ poate fi atît pozitiv cît și negativ, în funcție de sensul curentului i și al cîmpului imprimat $\bar{E}_i$ (vezi fig. 6.5).

În ipoteza în care $e \cdot i > 0$, puterea electrică (6.31) poate fi la rîndul său pozitivă $(R \cdot i^2 > e \cdot i)$ sau negativă $(R \cdot i^2 < e \cdot i)$. În primul caz $(P > 0)$, porțiunea respectivă de circuit (latură) este *receptoare*, iar în al doilea caz $(P < 0)$ porțiunea de circuit se numește latură *generatoare* (vezi par. 7.1).

6.4. LEGEA ELECTROLIZEI

Această lege a fost stabilită experimental de către F a r a d a y și exprimă legătura dintre masa unui element sau radical chimic care se depune la unul din electrozii unei băi de electroliză și curentul care parcurge baia. Masa m de substanță care se depune în timpul t la un electrod al băii electrolitice este proporțională cu sarcina trecută prin baie și cu echivalentul chimic al elementului sau radicalului depus:

$$m = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{A}{\nu} \int_0^t i \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{A}{\nu} \cdot q, \tag{6.32}$$

unde $\frac{A}{\nu}$ este *echivalentul chimic* al substanței depuse, iar F_0 este *constanta universală* a lui Faraday ($F_0 = 96\,490$ coulombi pe echivalent-gram). De obicei m se măsoară în grame, A (masa atomică sau masa moleculară) se măsoară în grame/mol, iar ν este valența substanței depuse. Deoarece F_0 este o constantă universală (nu depinde de natura electrolitului), legea electrolizei (6.32) este o lege generală, valabilă și în regimul variabil al cîmpului electromagnetic.

CAPITOLUL 7

CIRCUITE DE CURENT CONTINUU

7.1. MĂRIMILE, PARAMETRII ŞI LEGILE CIRCUITELOR LINIARE DE CURENT CONTINUU

7.1.1. Structura şi clasificarea circuitelor

Se numeşte *circuit*, un ansamblu de generatoare şi receptoare, cu legătură conductoare între ele. Se numeşte *reţea*, un ansamblu de circuite cu legătură electrică între ele. *Elementele* unui circuit de curent continuu sînt sursele de energie şi rezistoarele electrice. *Mărimile* care intervin sînt: tensiunea electromotoare (e), căderea de tensiune sau tensiunea electrică (u), intensitatea curentului electric (i) şi puterea electrică (p). Rezistoarele sînt caracterizate prin *parametrul* R, numit rezistenţă electrică.

Structura circuitelor se caracterizează prin: ramuri (sau laturi), noduri şi ochiuri (sau bucle). În figura 7.1 este reprezentat un circuit care conţine surse (e_5 şi e_6) şi rezistoare (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 şi R_6).

Se numeşte latură (sau ramură) a unui circuit o porţiune neramificată a sa. De exemplu latura AB, latura BD etc. Numărul de laturi ale unui circuit se notează cu L. În cazul figurii 7.1, $L = 6$.

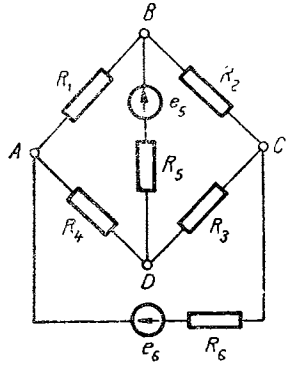


Fig. 7.1

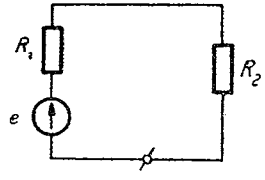


Fig. 7.2

Se numește nod, punctul de intersecție a cel puțin trei laturi ale circuitului. În figura 7.1 nodurile sînt A, B, C și D. Numărul de noduri ale unui circuit se notează cu N (în figura 7.1, $N = 4$).

De la aceste definiții face excepție circuitul neramificat (fig. 7.2) care se consideră că are o singură latură și un singur nod.

Se numește buclă (ochi) a unui circuit, un traseu conductor închis în acel circuit. Numărul de bucle independente ale unui circuit se notează cu litera B. În figura 7.1, pot fi ochiuri următoarele trasee: $ABDA$, $DBCD$ etc.

Structura oricărei rețele electrice este complet determinată, dacă se cunosc: numărul de laturi (L), numărul de noduri (N) și numărul buclelor independente (B).

Se numește buclă independentă acea buclă care conține cel puțin o latură necomună cu alte bucle. Există o teoremă (a lui Euler) care dă numărul buclelor independente ale unui circuit:

$$B = L - N + 1. \tag{7.1}$$

Circuitele electrice se clasifică după mai multe criterii, astfel:

a) După natura elementelor ce intră în structura lor există circuite liniare, circuite neliniare și circuite parametrice. În circuitele liniare, parametrii circuitelor (de exemplu rezistențele) nu depind nici de curent nici de timp. În circuitele neliniare parametrii circuitelor depind de curent, iar în circuitele parametrice depind de timp.

b) După regimul de funcționare se deosebesc: circuite de curent continuu (c.c.), caracterizate de regimul staționar, în care este posibil numai curentul electric de conducție în conductoare; circuite de curent alternativ (c.a.), caracterizate de regimul cvasistaționar, existînd curent electric de conducție în conductoare și curent electric de deplasare în dielectricul condensatoarelor din circuit. În acest caz, într-o secțiune a conductorului, curentul variază periodic în timp (sinusoidal sau nesinusoidal).

c) În raport cu sursele pot exista: circuite active (conțin surse); circuite pasive (nu conțin surse).

În figura 7.1 laturile circuitului care conțin surse se numesc laturi active (laturile AC și BD), iar cele care nu conțin surse se numesc laturi pasive (laturile AB, BC, CD și DA).

d) După structura geometrică a circuitelor pot exista: circuite filiforme (dimensiunile transversale ale conductoarelor sînt mult mai mici decît cele longitudinale), caracterizate prin aceea că densitatea de curent este aceeași în orice punct al unei secțiuni transversale a conductorului; circuite masive (dimensiunile transversale ale conductoarelor sînt comparabile cu cele longitudinale).

e) După localizarea parametrilor circuitului pot exista: circuite cu parametri concentrați; circuite cu parametri distribuiți.

f) După legătura cu exteriorul se deosebesc: circuite izolate (nu au borne de acces cu exteriorul); circuite neizolate (au borne de acces cu exteriorul).

Circuitul care are numai două borne de acces cu exteriorul se numește dipol; circuitul care are 4 borne de acces cu exteriorul se numește cuadripol; etc.

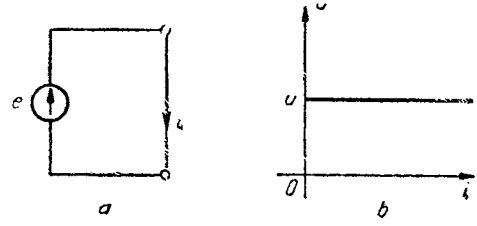


Fig. 7.3.

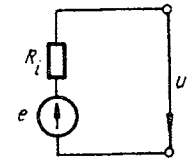


Fig. 7.4.

7.1.2. Surse de energie (generatoare)

În schemele circuitelor se întîlnesc noțiunile de generator de tensiune și generator de curent.

Generatorul ideal de tensiune este un element activ bipolar, care se bucură de proprietatea că tensiunea la bornele sale este riguros constantă și ea nu depinde de valoarea curentului debitat. Simbolul său este dat în figura 7.3, *a*, iar caracteristica sa în figura 7.3, *b*. În realitate, generatorul ideal de tensiune nu poate exista, deoarece, conform legii lui Ohm $\left(i = \frac{u}{R}\right)$, cînd rezistența devine zero, avem $i \to \infty$, deci puterea ($p = u \cdot i$) devine infinită.

Din acest motiv generatorul real (fig. 7.4) trebuie să cuprindă în serie cu cel ideal o rezistență R_i (rezistență interioară), care limitează curentul la o valoare finită, conform legii lui Ohm:

$$i = \frac{e}{R + R_i}. \tag{7.2}$$

Tensiunea la bornele generatorului real fiind dată de relația, $u_b = e - iR_i$, caracteristica sa rezultă ca în figura 7.5. Aceasta se apropie de caracteristica ideală (fig. 7.3, *b*) cu atît mai mult, cu cît rezistența internă (R_i) este mai mică.

Generatorul ideal de curent este un element activ bipolar, care se bucură de proprietatea că intensitatea curentului debitat este riguros constantă și ea nu depinde de valoarea tensiunii la borne. Simbolul său este dat în figura 7.6, *a*, iar caracteristica sa în figura 7.6, *b*.

În practică nu poate exista un generator ideal de curent deoarece, conform legii lui Ohm ($u = i \cdot R$), la mersul în gol ($R = \infty$) rezultă $u \to \infty$

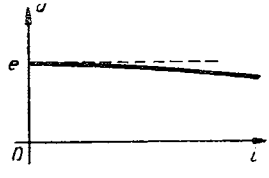


Fig. 7.5.

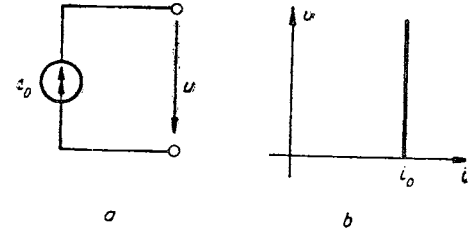


Fig. 7.6.

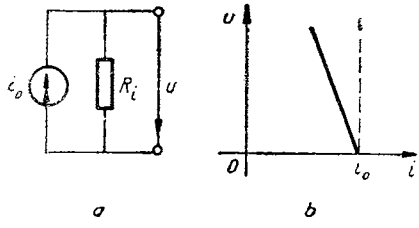


Fig. 7.7.

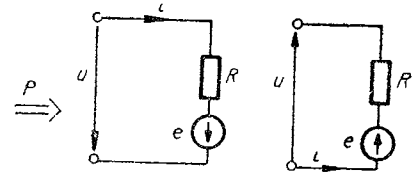


Fig. 7.8.

şi ar debita o putere ($p = u \cdot i$) infinită. Din acest motiv, generatorul real de curent cuprinde în paralel cu cel ideal o rezistenţă R_i (rezistenţă interioară), conform schemei din figura 7.7, *a*, iar caracteristica sa devine cea din figura 7.7, *b*. Caracteristica generatorului real de curent ($i = i_0 - \frac{u}{R_i}$) se apropie de caracteristica ideală (fig. 7.6, *b*) cu atît mai mult cu cît rezistenţa internă R_i este mai mare.

Laturile unui circuit pot fi laturi receptoare sau laturi generatoare.

Latura este receptoare dacă puterea consumată este pozitivă, adică:

$$p = u \cdot i > 0. \tag{7.3}$$

Aceasta impune ca sensurile lui u şi i să coincidă.

Latura este generatoare dacă puterea consumată este negativă, adică:

$$p = u \cdot i < 0. \tag{7.4}$$

Aceasta impune că sensurile lui u şi i nu coincid.

În funcţie de relaţiile (7.3) şi (7.4). se pot găsi patru scheme la care se stabilesc convenţional sensurile de referinţă. Ele sînt date în figura 7.8 pentru receptoare şi în figura 7.9 pentru generatoare. Alăturat este figurat simbolic sensul de transmitere al puterii.

În schemele din figura 7.8, legea lui Ohm se scrie:

$$u + e = R \cdot i, \tag{7.5}$$

valabilă pentru laturi receptoare. Pentru laturi generatoare (fig. 7.9), legea lui Ohm se scrie:

$$e - u = R \cdot i \quad \text{sau} \quad e = u + R \cdot i \tag{7.6}$$

7.1.3. Teoremele lui Kirchhoff

Prima teoremă a lui Kirchhoff rezultă din legea conservării sarcinii electrice libere (6.1):

$$i_\Sigma = 0. \tag{7.7}$$

Dacă suprafaţa Σ înconjoară un nod al unui circuit (fig. 7.10), relaţia (7.7) se scrie:

$$-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0. \tag{7.8}$$

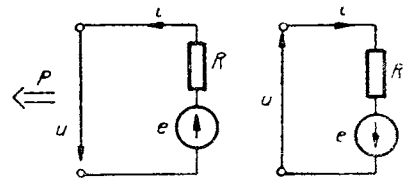


Fig. 7.9.

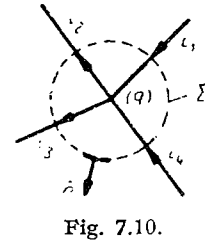


Fig. 7.10.

Curenții care intră în suprafață se iau cu semnul minus deoarece sensul lor este contrar direcției pozitive a normalei la suprafața n. Relația (7.8) se mai poate pune sub forma:

$$\sum_{k \in q} i_k = 0\,; \quad (q = 1,\ 2\ \ldots\ N-1) \tag{7.9}$$

adică *suma algebrică a curenților care aparțin unui nod q este egală cu zero.*

Se mai poate demonstra că într-un circuit cu N noduri, teorema întîi a lui Kirchhoff se aplică pentru $N-1$ noduri.

Teorema a doua a lui Kirchhoff se demonstrează plecînd de la legea lui Ohm. Se consideră un ochi de circuit (fig. 7.11) care cuprinde nodurile *1, 2, ..., m* și *n*. O latură a acestei bucle conține elementele R_k și e_k, tensiunea la borne fiind u_k, iar curentul din latură i_k. Legea lui Ohm scrisă pentru această latură este:

$$u_k + e_k = R_k \cdot i_k. \tag{7.10}$$

Tensiunea u_k se mai poate scrie, în funcție de potențialele nodurilor:

$$u_k = V_m - V_n.$$

Pentru conturul închis Γ, care este chiar bucla considerată a circuitului, rezultă:

$$\Sigma u_k = (V_m - V_n) + (V_n - V_2) + (V_2 - V_1) + (V_1 - V_m) = 0. \tag{7.12}$$

Cu această observație relația (7.10), scrisă pentru întreg conturul închis Γ, devine:

$$\sum_{k \in p} e_k = \sum_{k \in p} R_k \cdot i_k\,; \quad (p = 1, 2, \ldots, L-N+1). \tag{7.13}$$

Aceasta reprezintă teorema a doua a lui Kirchhoff și se enunță astfel: *într-o buclă a unui circuit, suma algebrică a tensiunilor electromotoare* (e_k) *este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune* ($R_k \cdot i_k$) *din laturile buclei* (p) *considerate.*

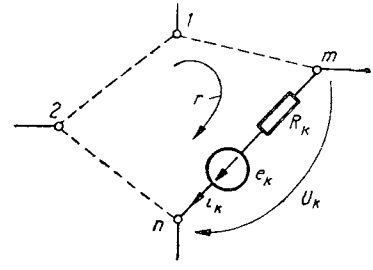


Fig. 7.11.

În relația (7.13) termenii apar cu plus dacă sensul de parcurgere al buclei coincide local cu sensul mărimii respective și apar cu minus dacă sensurile nu coincid.

Se poate demonstra că într-o rețea cu L laturi și N noduri, numărul de bucle (independente) pentru care se poate aplica teorema a doua a lui Kirchhoff este:

$$B = L - N + 1. \tag{7.14}$$

7.1.4. Teorema conservării puterilor

Se consideră în figura 7.12 o rețea neizolată, pe la bornele căreia se comunică energie. Se alege un nod de referință O. Aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff unui nod oarecare j se obține:

$$i_j = i_{j0} + i_{j1} + \ldots + i_{jk}. \tag{7.15}$$

Se înmulțește relația (7.15) cu u_{j0} și se efectuează însumarea după j:

$$\sum_{j=1}^{n} u_{j0} \cdot i_j = \sum_{j=1}^{n} u_{j0}\,(i_{j0} + i_{j1} + \ldots + i_{jk}). \tag{7.16}$$

Membrul al doilea din (7.16) se poate scrie dezvoltat:

$$u_{10}(i_{10} + i_{12} + \ldots + i_{1n}) + u_{20}(i_{20} + i_{21} + \ldots + i_{2n}) + \ldots + u_{n0}(i_{n1} + \\ + i_{n0} + \ldots + i_{n,n-1}). \tag{7.17}$$

În această relație, ținînd cont că $i_{kj} = -i_{jk}$, rezultă:

$$\sum_{j=1}^{n} u_{j0} \cdot i_j = u_{10} \cdot i_{10} + u_{20} \cdot i_{20} + \ldots + u_{n0} \cdot i_{n0} + (u_{10} - \\ - u_{20}) \cdot i_{12} + (u_{20} - u_{30}) \cdot i_{23} + \ldots + (u_{j0} - u_{k0}) \cdot i_{jk} + \ldots \tag{7.18}$$

Un termen oarecare al membrului drept se mai poate scrie

$$(u_{j0} - u_{k0}) \cdot i_{jk} = u_{jk} \cdot i_{jk}, \tag{7.19}$$

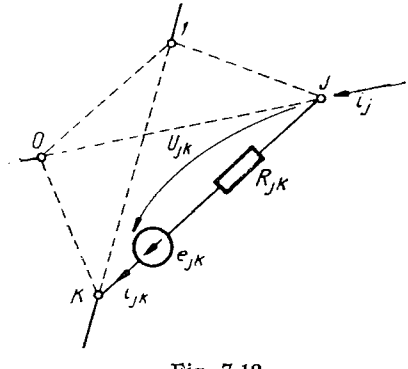


Fig. 7.12.

care înlocuit în (7.16) conduce la relația:

$$\sum_{j=1}^{n} u_{j0} \cdot i_j = \sum_{\substack{j=0 \\ j<k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_{jk} \cdot i_{jk} \tag{7.20}$$

Această relație reprezintă teorema conservării puterilor și se enunță astfel: *într-o rețea, suma puterilor primite pe la borne* $(u_{j0} \cdot i_{j0})$ *se consumă pe laturi* $(u_{jk} \cdot i_{jk})$.

Pentru o rețea izolată (fără borne de acces cu exteriorul), puterea primită pe la borne este nulă, deci (7.20) devine:

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_{jk} \cdot i_{jk} = 0. \tag{7.21}$$

Aplicînd legea lui Ohm pentru o latură (fig. 7.12), cu convenția de la receptoare, rezultă

$$u_{jk} + e_{jk} = R_{jk} \cdot i_{jk}, \tag{7.22}$$

care introdusă în (7.21), conduce la:

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} e_{jk} \cdot i_{jk} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} R_{jk} \cdot i_{jk}^2 \; ; \; (j < k). \tag{7.23}$$

Relația (7.23) se interpretează astfel: într-o rețea izolată, puterea debitată de surse ($e_{jk} \cdot i_{jk}$) se consumă pe rezistențele din laturile rețelei ($R_{jk} \cdot i_{jk}^2$).

7.1.5. Teorema transferului maxim de putere

Legile și teoremele stabilite pînă acum pentru circuite sînt valabile și în curent continuu și în curent alternativ. Teorema care urmează a fi demonstrată în continuare are o formă puțin modificată în curent alternativ; ea se demonstrează deocamdată în curent continuu. Se obișnuiește a se nota mărimile în curent continuu prin litere mari, astfel: tensiunea electromotoare (E), tensiunea electrică (U), intensitatea curentului electric (I), puterea electrică (P). Fiind dată (fig. 7.13) o sursă de tensiune electromotoare E, cu rezistența interioară R_i, care debitează pe un rezistor cu rezistența R, se cere să se determine valoarea rezistenței R, pentru ca sursa să transmită putere maximă acesteia.

În circuitul din figura 7.13 curentul va fi:

$$I = \frac{E}{R + R_i}. \tag{7.24}$$

Puterea transmisă rezistorului (de rezistență R) este:

$$P_2 = R \cdot I^2 = \frac{R \cdot E^2}{(R + R_i)^2}. \tag{7.25}$$

Puterea maximă se obține din condiția

$$\frac{\partial P_2}{\partial R} = 0, \tag{7.26}$$

care conduce la relația:

$$R = R_i, \tag{7.27}$$

adică sursa transmite puterea maximă cînd re-

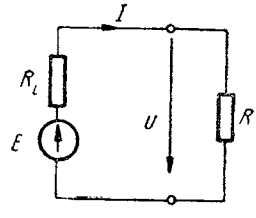


Fig. 7.13.

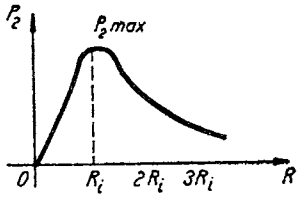


Fig. 7.14.

zistența de sarcină este egală cu rezistența interioară a sursei. În acest caz, puterea P_2 transmisă are valoarea:

$$P_2 = \frac{E^2}{4R_i}, \tag{7.28}$$

iar cea furnizată de sursă are valoarea:

$$P_1 = E \cdot I = \frac{E^2}{2R_i}. \tag{7.29}$$

Randamentul transmisiei în această ipoteză (a transferului maxim de putere) este:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2} = 50\%. \tag{7.30}$$

În figura 7.14 este reprezentată variația puterii P_2 în funcție de valoarea rezistenței de sarcină R (relația 7.25).

7.2. TRANSFORMAREA SCHEMELOR CIRCUITELOR LINIARE DE CURENT CONTINUU

În scopul de a simplifica studiul și rezolvarea circuitelor complexe de curent continuu (c.c.), se recurge la transformarea și înlocuirea schemelor complicate cu altele mai simple, dar echivalente. Pentru ca două circuite să fie echivalente, este necesar ca tensiunile nodurilor și curenții ce intră în noduri să rămînă neschimbați.

7.2.1. Conexiunile rezistoarelor

Există mai multe moduri de conectare a rezistoarelor: conectarea în serie, conectarea în paralel, conectarea mixtă.

a. Conexiunea rezistoarelor serie (fig. 7.15, *a*). Se pune problema să se găsească o rezistență echivalentă (R_e) a acestei conexiuni, astfel încît tensiunea U și curentul I să se păstreze aceleași în ambele scheme (fig. 7.15, *a* și *b*).

În figura 7.15, *a*, se poate scrie:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U, \tag{7.31}$$

dar:

$$U_1 = R_1 \cdot I; \quad U_2 = R_2 \cdot I; \quad \ldots \quad U = R_n \cdot I, \tag{7.32}$$

care înlocuite în (7.31) conduc la:

$$U = (R_1 + R_2 + \ldots + R_n) \cdot I. \tag{7.33}$$

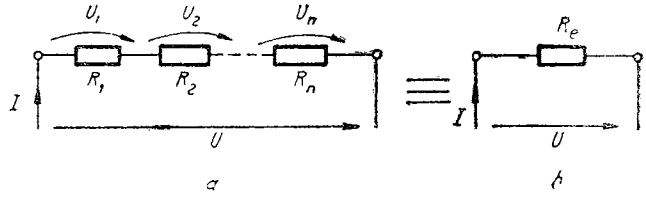


Fig. 7.15.

Rezistența echivalentă conexiunii serie (fig. 7.15, *b*) va fi:

$$R_e = \frac{U}{I} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k. \tag{7.34}$$

Deoarece toți termenii sumei sînt mărimi pozitive ($R_k > 0$), rezultă că rezistența echivalentă, la conectarea în serie a mai multor rezistențe, este mai mare decît oricare dintre rezistențe ($R_e > R_k$).

Observație

Dacă există două rezistoare conectate în serie, cunoscînd tensiunea aplicată la borne, se pot determina căderile de tensiune la bornele fiecărui rezistor în parte, fără a mai fi nevoie să se calculeze curentul. Într-adevăr, în figura 7.16 curentul este:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}, \tag{7.35}$$

iar căderile de tensiune la bornele rezistoarelor vor fi:

$$U_1 = R_1 \cdot I = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{7.36}$$

$$U_2 = R_2 \cdot I = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{7.37}$$

b. Conexiunea rezistoarelor în paralel (fig. 7.17 *a*). Se cere să se găsească o rezistență echivalentă (R_e), astfel încît U și I să se păstreze, adică să existe identitatea schemelor din figura 7.17, *a* și *b*. La conectarea în paralel, tensiunea la bornele rezistoarelor fiind aceeași (U), se pot scrie relațiile:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad \ldots, I_n = \frac{U}{R_n}. \tag{7.38}$$

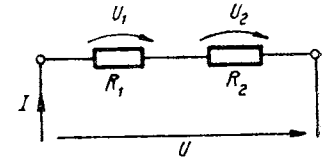


Fig. 7.16.

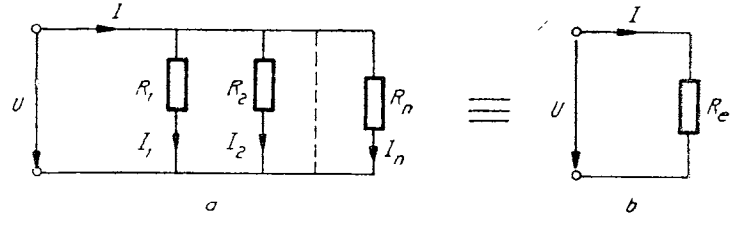


Fig. 7.17

Aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff unui nod, rezultă:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) \cdot U. \qquad (7.39)$$

Rezistența echivalentă (fig. 7.17, *b*) este deci:

$$R_e = \frac{U}{I} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}. \qquad (7.40)$$

Introducînd conductanțele $\left(G = \frac{1}{R}\right)$, relația (7.40) se scrie:

$$G_e = G_1 + G_2 + \ldots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k, \qquad (7.41)$$

adică la conectarea în paralel, conductanța echivalentă este egală cu suma conductanțelor laturilor.

Deoarece $G_k > 0$, rezultă că la conectarea în paralel conductanța echivalentă este mai mare decît oricare din conductanțe (rezistența echivalentă este mai mică decît oricare rezistență a conectării în paralel).

Observație

Fiind date două rezistoare conectate în paralel (fig. 7.18), dacă se cunoaște curentul rezultant, se pot determina curenții prin cele două rezistoare, fără a fi nevoie să se cunoască tensiunea aplicată la borne. Aplicînd relația (7.20), rezistența echivalentă este:

$$R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \qquad (7.42)$$

Tensiunea la borne va fi:

$$U = R_e \cdot I = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I. \qquad (7.43)$$

Curenții vor fi:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I; \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I. \qquad (7.44)$$

c) Conexiunea mixtă a rezistoarelor (fig. 7.19). În această schemă, rezistoarele cu rezistențele R_2 și R_3 sînt conectate în paralel, apoi în serie cu R_1. Utilizînd relațiile anterioare, se obține rezistența echivalentă:

$$R_e = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}. \qquad (7.45)$$

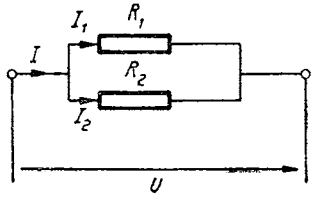


Fig. 7.18

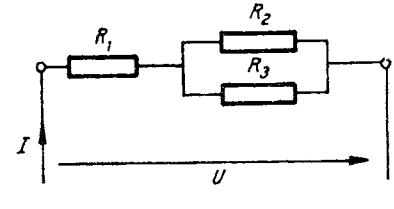


Fig. 7.19.

7.2.2. Teorema lui Kennelly de transfigurare a circuitelor pasive

Această teoremă, în cazul general, se referă la transfigurarea unui circuit electric cu laturile conectate în stea (fig. 7.20, *a*) într-un alt circuit echivalent în care laturile sînt conectate în poligon complet (fig. 7.20, *b*). Dacă circuitul are $n + 1$ noduri și n laturi conectate în stea, la conectarea în poligon circuitul va avea n noduri și C_n^2 laturi. Transfigurarea stea-poligon este posibilă întotdeauna, însă în sens invers (poligon-stea) nu este posibilă decît pentru $n = C_n^2$, adică pentru $n = 3$, deci numai cînd poligonul este un triunghi.

În cazul transfigurării stea-triunghi (fig. 7.21), pentru a păstra curenții în noduri, precum și tensiunile dintre noduri, este necesar ca rezistențele echivalente între noduri să fie aceleași, atît în cazul conectării în stea, cît și în cazul conectării în triunghi. Egalînd rezistența echivalentă între nodurile *1* și *2* din cadrul celor două scheme, rezultă:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \qquad (7.46)$$

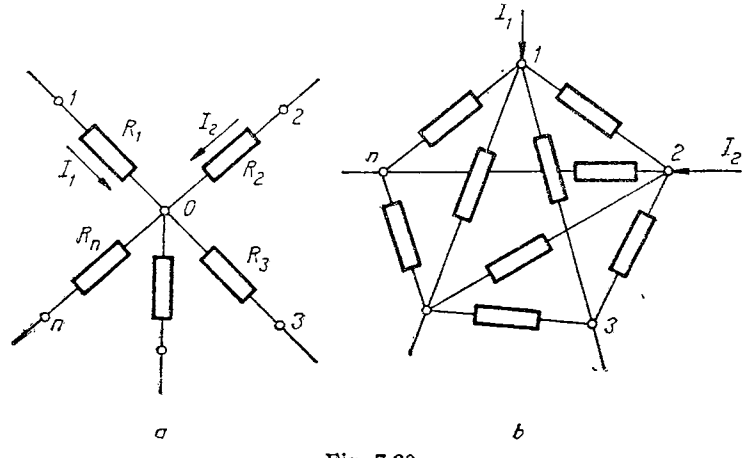


Fig. 7.20.

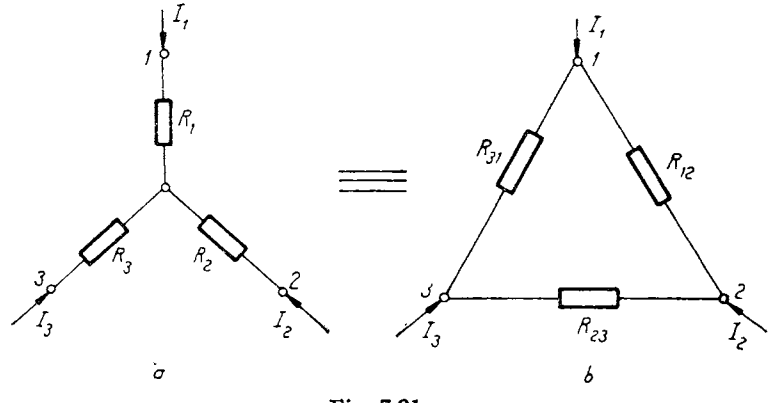


Fig. 7.21.

Procedînd la fel pentru celelalte noduri, se obţin relaţiile:

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{32}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \tag{7.47}$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \tag{7.48}$$

Înmulţind (7.47) cu (-1) şi adunînd toate trei relaţiile, se obţine:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \tag{7.49}$$

apoi în mod similar rezultă:

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \tag{7.50}$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \tag{7.51}$$

Prin rezolvarea inversă a sistemului de ecuaţii (7.49), (7.50) şi (7.51), se obţine de exemplu:

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}. \tag{7.52}$$

Rezistenţele R_{23} şi R_{31} se obţin prin permutări. Relaţiile (7.49) ... (7.51) rezolvă problema transfigurării triunghi-stea.

7.2.3. Conexiunile laturilor active de circuit

a. Conexiunea serie (fig. 7.22, *a*). Aplicînd legea lui Ohm pentru fiecare latură activă în parte, se obţin relaţiile:

$$\begin{aligned} U_1 + E_1 &= R_1 I \\ U_2 + E_2 &= R_2 I \\ \dots \quad &\dots \quad \dots \\ U_n + E_n &= R_n I. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Ţinînd cont de egalitatea, $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$, prin însumarea relaţiilor (7.53) se obţine:

$$U + \sum_{k=1}^{n} E_k = I \sum_{k=1}^{n} R_k. \tag{7.54}$$

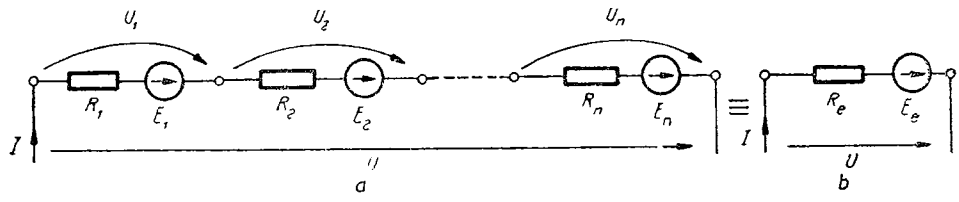


Fig. 7.22.

Identificînd această relație cu schema echivalentă din figura 7.22, *b*, se obțin relațiile de echivalență ale conectării serie:

$$R_e = \sum_{k=1}^{n} R_k \quad \text{și} \tag{7.55}$$

$$E_e = \sum_{k=1}^{n} E_k. \tag{7.56}$$

În relația (7.56) însumarea se face algebric, luîndu-se cu semnul plus tensiunile electromotoare care au același sens cu curentul, iar cu semnul minus cele care au sens contrar curentului din circuit.

b. Conexiunea în paralel (fig. 7.23, *a*). Aplicînd legea lui Ohm pentru fiecare latură a circuitului din figura 7.23, *a*, se obțin curenții:

$$I_1 = \frac{U + E_1}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U + E_2}{R_2}; \quad \ldots \quad I_n = \frac{U + E_n}{R_n}. \tag{7.57}$$

Din prima teoremă a lui Kirchhoff,

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n,$$

însumînd relațiile (7.57), rezultă:

$$I = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) + \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \ldots + \frac{E_n}{R_n}. \tag{7.58}$$

Introducînd conductanța $\left(G_k = \frac{1}{R_k}\right)$, relația de mai sus se scrie:

$$I = U \cdot \sum_{k=1}^{n} G_k + \sum_{k=1}^{n} E_k \cdot G_k \text{ sau } U + \frac{\Sigma E_k \cdot G_k}{\Sigma G_k} = I \cdot \frac{1}{\Sigma G_k}. \tag{7.59}$$

Identificînd relația (7.59) cu schema echivalentă din figura 7.23, *b*, se obțin relațiile de echivalență ale conectării paralel:

$$R_e = \frac{1}{\Sigma G_k}; \quad G_e = \sum_{k=1}^{n} G_k \tag{7.60}$$

$$E_e = \frac{\Sigma E_k G_k}{\Sigma G_k}. \tag{7.61}$$

În (7.61) suma $\Sigma E_k G_k$ conține atît termeni pozitivi, cît și negativi Sînt pozitivi cei pentru care sensul lui E_k coincide cu sensul lui E_e.

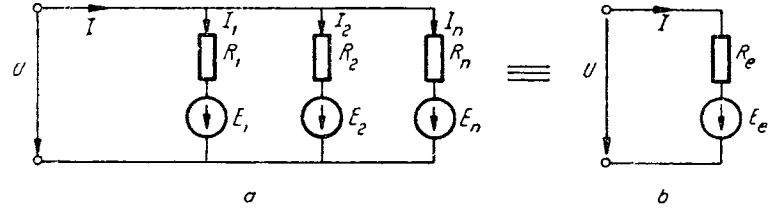


Fig. 7.23.

c. Echivalența dintre o sursă reală de tensiune și o sursă reală de curent. Pentru ca o sursă reală de tensiune (caracterizată prin tensiunea electromotoare E și rezistența interioară R_i') să fie echivalentă cu o sursă reală de curent (caracterizată prin curentul debitat I_0 și rezistența interioară R_i''), este necesar ca curentul I_R debitat pe aceeași rezistență R să fie același în ambele cazuri.

Sursa reală de tensiune (fig. 7.24, *a*) debitează pe rezistența R curentul:

$$I_R' = \frac{E}{R + R_i'}, \tag{7.62}$$

iar sursa reală de curent (fig. 7.24, *b*) debitează pe aceeași rezistență R curentul:

$$I_R'' = I_0 \frac{R_i''}{R + R_i''}. \tag{7.63}$$

Din relațiile (7.62) și (7.63), se obține condiția de echivalență a celor două surse reale:

$$R_i' = R_i'' = R_k \quad \text{și} \quad E = I_0 \cdot R_k. \tag{7.64}$$

7.3. METODE DE ANALIZĂ A CIRCUITELOR LINIARE DE CURENT CONTINUU (REZOLVAREA CIRCUITELOR)

Problema de analiză a circuitelor presupune cunoscute: structura circuitului (laturi și noduri), parametrii circuitului (toate rezistențele R_k), sursele (generatoare de tensiune sau de curent), și cere să se determine: curenții prin laturi, tensiunile între noduri, puterile consumate sau furnizate de către laturi.

Metoda generală de analiză constă în aplicarea teoremelor lui Kirchhoff ele fiind valabile atît în circuite liniare cît și în circuite neliniare, în regim staționar cît și în regim cvasistaționar.

În circuitele liniare, ecuațiile care rezultă din aplicarea teoremelor lui Kirchhoff sînt liniare, dar numărul mare al lor (egal cu numărul de laturi) duce la un volum mare de calcul. Din acest motiv, s-au elaborat metode de analiză a circuitelor care simplifică calculul.

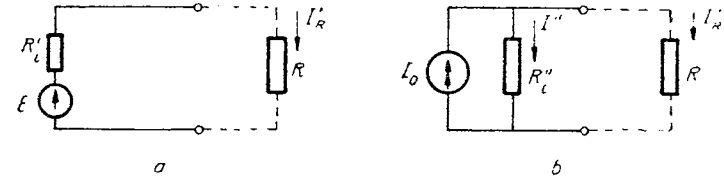


Fig. 7.24

7.3.1. Metode de analiză a circuitelor de curent continuu cu obținerea răspunsului pe toate laturile

a. Teorema suprapunerii efectelor (a superpoziției). Conform acestei teoreme, *curentul electric dintr-o latură a unui circuit în care există mai multe surse este suma algebrică a curenților produși în acea latură de fiecare sursă în parte, dacă ar acționa singură în circuit, celelalte fiind scurtcircuitate sau înlocuite cu rezistența lor interioară* (dacă au rezistență interioară diferită de zero). Această teoremă este valabilă numai în circuite liniare. Pentru demonstrație se consideră un circuit cu L laturi și N noduri în care se scriu teoremele lui Kirchhoff:

$$\sum_{k \in q} I_k = 0; \quad (q = 1, 2, \ldots, N - 1) \tag{7.65}$$

$$\sum_{k \in p} R_k I_k = \sum_{k \in p} E_k; \quad (p = 1, 2, \ldots, B), \tag{7.66}$$

unde B este numărul buclelor independente ($B = L - N + 1$).

Acest sistem de ecuații fiind liniar, rezolvîndu-l se obțin curenții sub forma:

$$I_j = \sum_{k=1}^{L} G_{jk} E_k; \quad (j = 1, 2, \ldots, L). \tag{7.67}$$

Coeficienții G_{jk} se numesc în acest caz conductanțe de transfer între laturile j și k și satisfac condiția de reciprocitate: $G_{jk} = G_{kj}$.

Relația (7.67) se scrie dezvoltat astfel:

$$I_j = G_{j1} E_1 + G_{j2} E_2 + \ldots + G_{jk} E_k + \ldots$$

Notînd:

$$I_{j1} = G_{j1} E_1, \; I_{j2} = G_{j2} E_2, \; \ldots, \; I_{jk} = G_{jk} E_k, \tag{7.68}$$

unde I_{j1} este curentul produs de sursa din ramura 1 în ramura j etc.; rezultă:

$$I_j = \sum_{k=1}^{L} I_{jk}, \tag{7.69}$$

relație care demonstrează teorema enunțată mai sus.

Exemplu

Circuitul din figura 7.25, *a*, care conține două surse, se poate rezolva prin metoda suprapunerii efectelor, descompunîndu-l în două circuite în care acționează separat cele două surse (fig. 7.25, *b* și fig. 7.25, *c*). Rezolvînd separat cele două circuite, se obțin respectiv curenții I'_k și I''_k ($k = 1, 2, 3$). Curenții reali din schema 7.25, *a* sînt dați apoi de relațiile:

$$I_1 = I'_1 - I''_1; \; I_2 = I''_2 - I'_2; \; I_3 = I'_3 + I''_3.$$

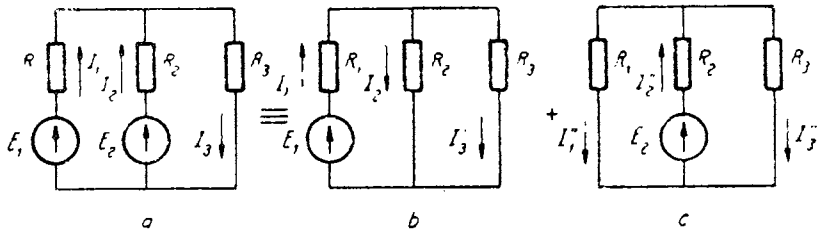


Fig. 7.25.

b. Metoda curenților independenți (a lui Maxwell). Această metodă reduce sistemul de L ecuații care se pot scrie din teoremele lui Kirchhoff la un sistem de $(L - N + 1)$ ecuații, introducînd noi variabile numite *curenți independenți* (curenți de bucle). Acești curenți de bucle circulă fictiv pe un drum închis prin buclele independente, în sensul atribuit arbitrar buclei respective și ei se notează cu $I'_1, I'_2, \ldots I'_j$. Curentul real I_k care circulă printr-o latură oarecare k a circuitului se va obține ca o sumă algebrică a acestor curenți fictivi ce străbat latura considerată:

$$I_k = \sum_{j \in k} I'_j \text{ (semnul } \in \text{ indică, că curentul fictiv } I'_j \text{ străbate latura } k\text{).} \tag{7.70}$$

Sistemul de $L - N + 1$ ecuații satisfăcut pentru curenții fictivi de bucle I'_j $(j = L - N + 1)$ se obține astfel: se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pentru buclele independente în număr de $L - N + 1$:

$$\sum_{k \in p} R_k I_k = \sum_{k \in p} E_k, \quad (p = 1, 2, \ldots, L - N + 1) \tag{7.71}$$

care, cu (7.70) devine:

$$\sum_{k \in p} R_k \sum_{j \in k} I'_j = \sum_{k \in p} E_k. \tag{7.72}$$

Ordonînd acum după curenți, se obține sistemul căutat:

$$\sum_{k=1}^{B} R_{kj} I'_j = \sum_{k \in p} E_k. \quad (j = 1, 2, \ldots, B). \tag{7.73}$$

În acest sistem, coeficienții au următoarele semnificații: R_{kk} este suma tuturor rezistențelor din bucla independentă cu indice k; R_{kj} este suma algebrică a tuturor rezistențelor laturilor comune buclelor independente k și j. În această sumă apar cu semnul plus acele rezistențe care sînt străbătute de către curenții fictivi I'_k și I'_j în același sens, și apar cu minus dacă curenții fictivi le străbat în sensuri contrarii. Suma din membrul drept al relației (7.73) este suma algebrică a tuturor tensiunilor electromotoare care acționează în bucla independentă k. Se iau cu semnul plus acele tensiuni electromotoare care au același sens cu curentul fictiv din bucla considerată, și se iau cu semnul minus cele care au sens contrar curentului fictiv.

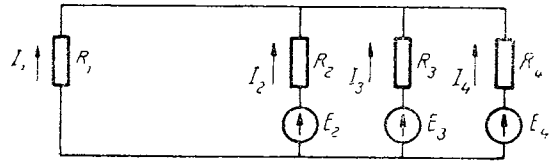


Fig. 7.26.

Exemplu

Se consideră circuitul din figura 7.26, care are un număr de laturi $L = 4$, un număr de noduri $N = 2$, deci un număr de bucle independente $B = L - N + 1 = 3$. Se presupune un sens al curenților reali, indicat prin săgeți în figura 7.26. Cele trei bucle independente, parcurse de către curenții fictivi I_1', I_2' și I_3', se iau de exemplu ca în figura 7.27.

Sistemul de ecuații (7.73) se scrie în acest caz:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}I_1' + R_{12}I_2' + R_{13}I_3' &= E_2 \\ R_{21}I_1' + R_{22}I_2' + R_{23}I_3' &= E_3 - E_2 \\ R_{31}I_1' + R_{23}I_2' + R_{33}I_3' &= E_4 - E_3, \end{aligned}\right\} \tag{7.74}$$

unde:

$$\left.\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_2; \quad R_{12} = R_{21} = -R_2 \\ R_{22} &= R_2 + R_3; \quad R_{23} = R_{32} = -R_3 \\ R_{33} &= R_3 + R_4; \quad R_{31} = R_{31} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.75}$$

Introducînd (7.75) în (7.74) și rezolvînd sistemul se găsesc valorile curenților fictivi I_1', I_2', I_3', apoi aplicînd relația (7.70) se obțin curenții reali:

$$I_1 = -I_1'; \quad I_2 = I_1' - I_2'; \quad I_3 = I_2' - I_3' \quad \text{și} \quad I_4 = I_3'. \tag{7.76}$$

c. Teorema potențialelor de noduri. Teoremele lui Kirchhoff, în afară de forma clasică,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in q} I_k &= 0 \\ \sum_{k \in p} I_k R_k &= \sum_{k \in p} E_k, \end{aligned} \tag{7.77}$$

se mai pot pune și sub o altă formă, numită formă duală. Astfel, dacă se consideră latura k a unui circuit (fig. 7.28), legea lui Ohm pentru această latură:

$$U_k + E_k = R_k I_k, \tag{7.78}$$

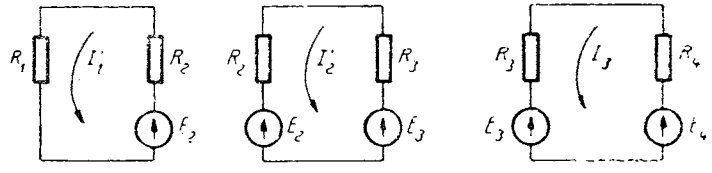


Fig. 7.27.

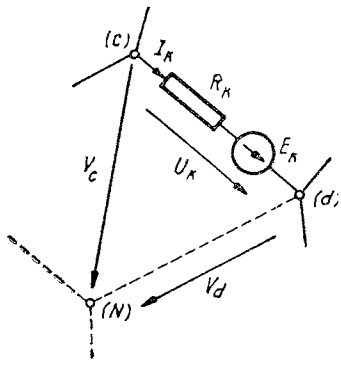


Fig. 7.28

conduce la:

$$I_k = \frac{U_k + E_k}{R_k} = U_k G_k + E_k G_k. \quad (7.79)$$

Pentru $U_k = 0$, adică latura k este pusă în scurtcircuit, relația (7.79) devine:

$$I_{ksc} = E_k G_k, \quad (7.80)$$

care introdusă în (7.79) conduce la

$$I_k = U_k G_k + I_{ksc}. \quad (7.81)$$

Dar, cum din teorema întîi a lui Kirchhoff se poate scrie pentru un nod de circuit $\sum_{k \in q} I_k = 0$, (7.81) devine:

$$\sum_{k \in q} U_k G_k = \sum_{k \in q} (-I_{ksc}). \quad (7.82)$$

Această relație este valabilă deci pentru noduri de circuit. În același timp, pentru bucle se poate scrie:

$$\sum_{k \in p} U_k = 0. \quad (7.83)$$

Relațiile (7.82) și (7.83) reprezintă formele duale ale teoremelor lui Kirchhoff, dacă se compară cu formele clasice (7.77). Mărimile duale se pot reprezenta astfel:

I	R	E	nod	ochi
↓	↓	↓	↓	↓
U	G	$-I_{sc}$	ochi	nod

Teorema potențialelor de noduri se demonstrează folosind forma duală a teoremelor lui Kirchhoff. În figura 7.28 se consideră nodul N drept nod de referință, față de care potențialele celorlalte noduri sînt: V_c, V_d etc.

Pentru celelalte $(N - 1)$ noduri ale circuitului (în afară de nodul N) prima teoremă a lui Kirchhoff sub formă duală se scrie:

$$\sum_{k \in q} G_k U_k = \sum_{k \in q} (-I_{ksc}), \quad (7.84)$$

unde tensiunea U_k se poate exprima în funcție de potențiale astfel:

$$U_k = V_c - V_d. \quad (7.85)$$

Suma din membrul stîng se poate grupa astfel după cele $N - 1$ potențiale necunoscute ale nodurilor. După această grupare, apare ca factor comun conductanța tuturor laturilor care sînt legate la un nod oarecare k, sub forma:

$$G_{kk} = +\sum_{k \in q} G_k, \quad (7.86)$$

apoi apare ca factor, cu un semn schimbat, suma conductanțelor laturilor care leagă nodurile j și k:

$$G_{jk} = -\sum_{\substack{i \in j \\ i \in k}} G_i. \tag{7.86'}$$

Cu aceste observații se obține sistemul:

$$\sum_{K=1}^{N-1} G_{jk} V_k = \sum_{k \in q} (-I_{ksc}); \ (j = 1, 2 \ \ldots \ N-1). \tag{7.87}$$

Notînd $-I_{ksc} = +I'_{ksc}$, sistemul (7.87) se poate scrie dezvoltat astfel:

$$\begin{aligned} &G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \ldots + G_{1k}V_k = I'_{1sc} \\ &G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + \ldots + G_{2k}V_k = I'_{2sc} \\ &\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ &G_{k1}V_1 + G_{k2}V_2 + \ldots + G_{kk}V_k = I'_{ksc}. \end{aligned} \tag{7.88}$$

În acest sistem necunoscutele sînt potențialele nodurilor, k fiind egal cu $N-1$. Coeficienții acestui sistem au semnificațiile: conductanțele cu indici dubli (de tipul G_{kk}) se numesc conductanțe proprii nodului k, se calculează cu relația (7.86) și reprezintă suma conductanțelor laturilor legate la nodul k; conductanțele de tipul G_{jk} $(j \neq k)$ satisfac condiția de reciprocitate $(G_{jk} = G_{kj})$, se numesc conductanțe mutuale între nodurile j și k, și, conform relației (7.86'), reprezintă suma cu semn schimbat a tuturor conductanțelor laturilor care leagă nodurile j și k. Termenii din membrul drept al sistemului (7.88) reprezintă curenții de scurtcircuit injectați de către surse în noduri. Ei se calculează cu relații de forma (7.80). În această sumă, apar cu semnul plus curenții produși de tensiuni electromotoare care au sensul dirijat spre nodul considerat și apar cu semnul minus curenții produși de tensiuni electromotoare care au sensul dirijat de la nodul considerat către alt nod al circuitului.

După rezolvarea sistemului (7.88), se determină tensiunile la bornele laturilor:

$$U_{jk} = V_j - V_k, \tag{7.89}$$

apoi, aplicînd legea lui Ohm, se determină curenții din laturi:

$$I_{jk} = \frac{U_{jk} + E_{jk}}{R_{jk}}. \tag{7.90}$$

Exemplu

Să se rezolve circuitul din figura 7.29 prin metoda potențialelor de noduri.

Circuitul are $L = 5$ și $N = 3$. Se consideră nodul (3) drept nod de referință. Față de acest nod, necunoscutele sînt V_1 și V_2. Sistemul (7.88) se scrie în acest caz:

$$\begin{aligned} &G_{11}V_1 + G_{12}V_2 = I'_{1sc} \\ &G_{21}V_1 + G_{22}V_2 = I'_{2sc} \end{aligned} \tag{7.91}$$

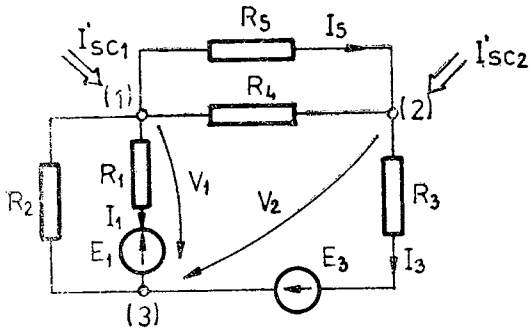


Fig. 7.29.

În acest sistem, conform (7.80), rezultă:

$$I'_{1sc} = \frac{E_1}{R_1}; \quad I'_{2sc} = -\frac{E_3}{R_3}. \tag{7.92}$$

Apoi, conform (7.86) şi (7.86'), rezultă:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \tag{7.93}$$

şi

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5}. \tag{7.94}$$

Cu valorile (7.92), (7.93) şi (7.94) se rezolvă sistemul (7.91) şi se obţin potenţialele V_1 şi V_2. Pentru a afla apoi curenţii, se aplică legea lui Ohm, de exemplu:

$$I_1 = \frac{V_1 - E_1}{R_1}; \quad I_3 = \frac{V_2 + E_3}{E_3}. \tag{7.95}$$

Pentru a afla curentul I_5, se scrie mai întîi $U_{12} = V_1 - V_2$, după care,

$$I_5 = \frac{U_{12}}{R_5} \text{ etc.} \tag{7.96}$$

d. Teorema reciprocităţii. *Dacă o tensiune electromotoare acţionînd singură în ramura j produce în ramura k un curent I_{kj}, cînd va acţiona în ramura k va produce în ramura j acelaşi curent $I_{jk} = I_{kj}$.* Pentru demonstraţie se separă laturile j şi k ale circuitului şi se presupune că în circuit nu există decît o singură tensiune electromotoare E, care va acţiona pe rînd în laturile j şi k. Urmează să se demonstreze că există egalitatea: $I_{jk} = I_{kj}$(fig. 7.30).

Aplicînd teorema curenţilor independenţi, care se aleg astfel încît prin laturile j şi k curenţii reali să fie daţi numai de către curenţii fictivi ai celor două bucle, se obţin valorile curenţilor I'_k şi I'_j în cele două scheme.

Pentru schema din figura 7.30, *a* se scrie sistemul:

$$\begin{aligned}
&R_{11}I'_1 + R_{12}I'_2 + \ldots + R_{1k}I'_k + \ldots = 0\\
&R_{21}I'_1 + R_{22}I'_2 + \ldots + R_{2k}I'_k + \ldots = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&R_{j1}I'_1 + R_{j2}I'_2 + \ldots + R_{jk}I'_k + \ldots = E\\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
&R_{n1}I'_1 + R_{n2}I'_2 + \ldots + R_{nk}I'_k + \ldots = 0
\end{aligned} \tag{7.97}$$

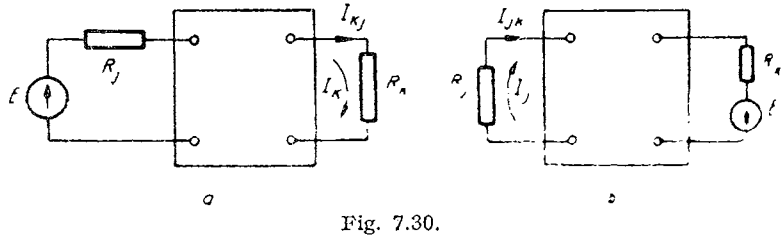


Fig. 7.30.

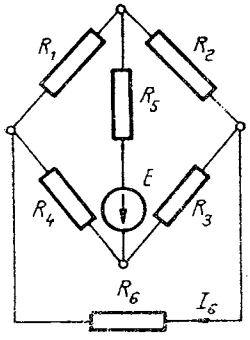


Fig. 7.31.

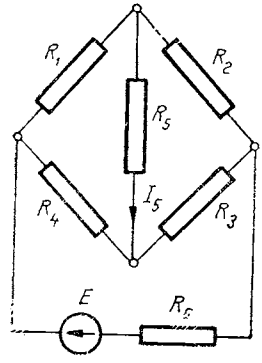


Fig. 7.32.

Rezolvînd după regula lui Cramer, rezultă:

$$I'_k = I_{kj} = \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} E. \tag{7.98}$$

Pentru schema din figura 7.30, *b*, aplicînd același procedeu, se obține:

$$I'_j = I_{jk} = E \cdot \frac{\Delta_{jk}}{\Delta}. \tag{7.99}$$

Deoarece rezistențele sistemului de ecuații (7.95) satisfac condiția de reciprocitate $R_{jk} = R_{kj}$, rezultă că și minorii determinantului satisfac aceeași condiție de reciprocitate:

$$\Delta_{jk} = \Delta_{kj}, \tag{7.100}$$

și relațiile (7.98) și (7.99) conduc la egalitatea:

$$I_{jk} = I_{kj}, \tag{7.101}$$

teorema fiind demonstrată.

Exemplu

Fiind dată schema din figura 7.31, se cere să se determine curentul I_6.

Conform teoremei reciprocității, curentul I_6 din figura 7.31 este egal cu curentul I_5 din figura 7.32, care se poate determina mult mai ușor.

7.3.2. Metode de analiză a circuitelor electrice de curent continuu, cu obținerea răspunsului pe o singură latură

Foarte des, în circuitele electrice complexe, interesează aflarea curentului numai pe o singură latură a circuitului. Pentru aceasta, se recurge la metode care determină numai un singur curent de pe o singură latură, aceste metode fiind bazate pe teoremele generatoarelor echivalente (de tensiune și de curent).

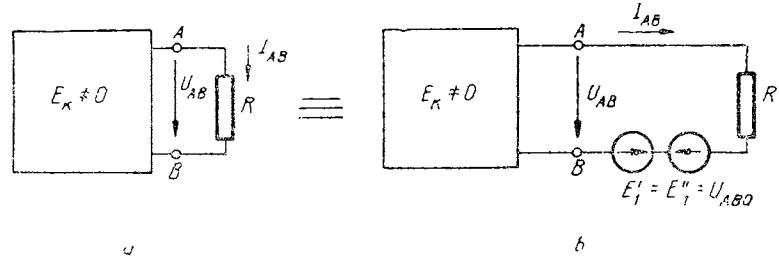


Fig. 7.33.

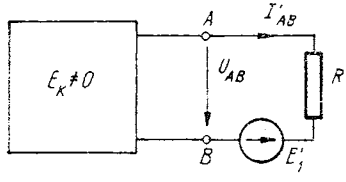
a. Teorema generatorului echivalent de tensiune (a lui Thévenin). *Curentul I_{AB} debitat de o rețea activă liniară, pe o rezistență R, legată între bornele AB, este egal cu tensiunea între punctele AB, la mersul în gol (cînd ramura cu rezistența R este întreruptă), împărțită la suma dintre acea rezistență și rezistența interioară a rețelei pasivizate.*

Pentru demonstrație se consideră circuitul în care s-au introdus pe latura AB două surse egale cu U_{AB0} și de sensuri contrare (U_{AB0} este tensiunea între punctele AB la mersul în gol, cînd latura cu rezistența R este întreruptă), care nu modifică funcționarea circuitului, deci există identitatea schemelor din figura 7.33 *a* și *b*. Aceste scheme sînt echivalente, deoarece, pentru ambele legea lui Ohm se scrie la fel:

$$U_{AB} = R \cdot I_{AB}, \text{ respectiv } U_{AB} - E_1' + E_1'' = R \cdot I_{AB}. \qquad (7.102)$$

Schema din figura 7.33, *b* poate fi, la rîndul său, descompusă în două scheme, conform teoremei suprapunerii efectelor, ca în figura 7.34. Legea lui Ohm pentru aceste din urmă scheme se scrie:

$$U_{AB} - E_1' = R \cdot I_{AB}', \text{ respectiv } U_{AB} + E_1'' = R \cdot I_{AB}''. \qquad (7.103)$$



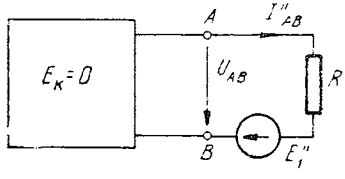


Fig. 7.34.

În prima schemă rezultă $I_{AB}' = 0$, deoarece $E_1' = U_{AB0}$. Prin suprapunerea efectelor curentul rezultant este:

$$I_{AB} = I_{AB}' + I_{AB}'' = I_{AB}'' = \frac{E_1''}{R + R_{AB0}}, \text{ sau:} \qquad (7.104)$$

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R + R_{AB0}}. \qquad (7.105)$$

Această relație reprezintă teorema generatorului echivalent de tensiune; ea coincide formal cu expresia curentului debitat de generatorul real de tensiune, care ar avea rezistența interioară egală cu R_{AB0} și tensiunea electromotoare egală cu U_{AB0}. Metoda aceasta este foarte comodă în cazul cînd $R_{AB0} \ll R$ și curentul ar fi dat aproximativ de relația: $I_{AB} \approx \frac{U_{AB0}}{R}$.

b. Teorema generatorului echivalent de curent (a lui Norton). Aceasta este o teoremă dual celei lui Thevenin și ea poate fi dedusă formal din aceasta, dacă se ține cont de dualitatea:

$$I_{AB} \rightarrow U_{AB}; \quad U_{AB0} \rightarrow I_{ABsc}; \quad R \rightarrow G.$$

Relația dual relației (7.105) este deci:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G + G_{AB0}}. \tag{7.106}$$

Aceasta reprezintă teorema lui Norton și se enunță astfel: *căderea de tensiune produsă pe o rezistență R, legată în latura AB a unei rețele active, este egală cu raportul dintre curentul de scurtcircuit al laturii și suma dintre conductanța laturii și conductanța rețelei pasivizate, calculată la mersul în gol între punctele A și B.* Metoda este avantajoasă, dacă $G_{AB0} \ll G$, iar în acest caz rezultă:

$$U_{AB} \cong R \cdot I_{ABsc}.$$

Exemplu

Fiind dat circuitul din figura 7.35, să se determine curentul I_{AB} utilizînd teorema lui Thevenin și tensiunea U_{AB} utilizînd teorema lui Norton.

Curentul I_{AB} se află aplicînd relația (7.105). Se întrerupe latura AB și rezultă:

$$R_{AB0} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \tag{7.107}$$

apoi:

$$U_{AB0} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{7.108}$$

Introducînd (7.107) și (7.108) în (7.105) rezultă curentul:

$$I_{AB} = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R(R_1 + R_2)}. \tag{7.109}$$

Pentru a afla tensiunea U_{AB} prin teorema lui Norton, se aplică formula (7.106).

Punînd ramura AB în scurtcircuit rezultă curentul de scurtcircuit:

$$I_{ABsc} = \frac{E}{R_1}. \tag{7.110}$$

Cu această valoare și cu

$$G = \frac{1}{R}; \; G_{AB0} = \frac{1}{R_{AB0}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}, \tag{7.111}$$

teorema lui Norton conduce la:

$$U_{AB} = \frac{E \cdot R \cdot R_2}{R_1R_2 + R(R_1 + R_2)}. \tag{7.112}$$

Ca verificare, din legea lui Ohm trebuie să existe relația:

$$U_{AB} = R \cdot I_{AB}, \tag{7.113}$$

ceea ce rezultă imediat din (7.109) și (7.112).

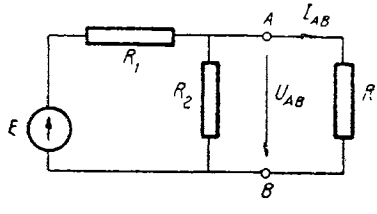


Fig. 7.35.

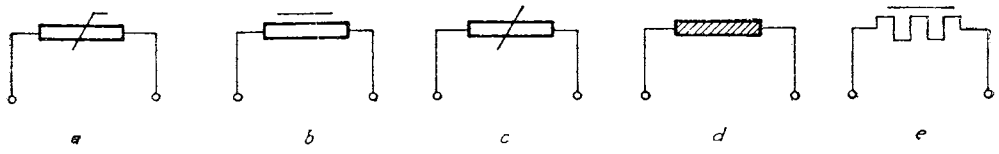


Fig. 7.36.

7.4. CIRCUITE NELINIARE DE CURENT CONTINUU

Rezistoarele neliniare sînt elemente de circuit care au rezistența electrică dependentă de curentul care trece prin ele sau de tensiunea aplicată la bornele lor. Caracteristica curent-tensiune $I = f(U)$ a rezistorului neliniar nu este o dreaptă ce trece prin origine (ca în cazul rezistoarelor liniare), ci ea este neliniară.

Un circuit de curent continuu se numește circuit neliniar dacă conține în structura sa cel puțin un rezistor neliniar.

Rezistoarele neliniare se reprezintă prin simbolurile grafice din figura 7.36, fiind mai răspîndite primele două simboluri.

Un rezistor neliniar este determinat dacă se cunoaște caracteristica sa $I = f(U)$, dată grafic, analitic sau sub formă tabelară.

Rezistoarele neliniare se caracterizează prin rezistența statică R_s și prin rezistența dinamică (rezistența diferențială) R_d, definite de relațiile:

$$R_s = \frac{U}{I} \quad \text{și} \quad R_d = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I}. \tag{7.114}$$

Mărimile inverse acestora se numesc conductanță statică G_s și respectiv conductanță dinamică G_d.

Rezistența statică și rezistența dinamică depind de punctul de funcționare, adică depind de curentul din rezistor sau de tensiunea aplicată la bornele rezistorului. În circuitele liniare, rezistența statică se confundă însă cu rezistența dinamică ($R_s = R_d = R$) și această mărime este o constantă ($R = \text{const.}$).

Dacă caracteristica curent-tensiune a rezistorului neliniar este dată grafic (fig. 7.37), relațiile de definiție ale rezistenței statice sau dinamice (7.114) devin:

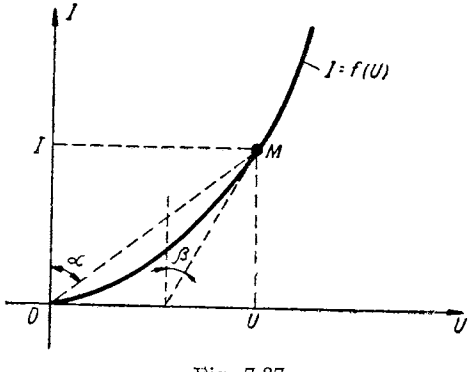


Fig. 7.37.

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{U}{I} = k \cdot \operatorname{tg} \alpha; \\ R_d &= \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} = k \cdot \operatorname{tg} \beta, \end{aligned} \tag{7.115}$$

unde k are dimensiunea unei rezistențe și este o constantă de scară. Aceste relații permit interpretarea rezistenței statice ca fiind o mărime

proporțională cu tangenta unghiului α format de vectorul de poziție OM cu axa ordonatelor I, iar rezistența dinamică ca fiind o mărime proporțională cu tangenta unghiului β format de dreapta tangentă la caracteristica neliniară (în punctul de funcționare M) cu axa ordonatelor I.

Rezistența statică a rezistoarelor neliniare este o mărime nenegativă, dar rezistența dinamică poate fi uneori și negativă. În circuitele electrice care conțin rezistoare cu rezistență dinamică negativă (de exemplu arcul electric) se pot produce oscilații autoîntreținute.

În funcție de forma caracteristicii curent-tensiune, rezistoarele neliniare se clasifică în: rezistoare simetrice și rezistoare nesimetrice. Rezistoarele simetrice (de exemplu lămpile cu incandescență, termistoarele etc) au caracteristica $I = f(U)$ simetrică față de origine, adică rezistența lor depinde de curent în mod identic pentru ambele sensuri ale curentului prin rezistor. Aceste rezistoare nu au borne „polarizate". Rezistoarele nesimetrice (de exemplu diodele semiconductoare, lămpile electronice etc) au caracteristica $I = f(U)$ nesimetrică, adică rezistența lor depinde atît de valoarea curentului cît și de sensul curentului prin rezistor. Rezistoarele nesimetrice au bornele „polarizate".

7.4.1. Caracteristicile unor rezistoare neliniare

a) Lămpile cu incandescență sînt rezistoare neliniare simetrice; neliniaritatea caracteristicii se datorește faptului că rezistența filamentului se modifică odată cu modificarea temperaturii sale, dictată de curentul care trece prin filament. Caracteristicile neliniare pentru două lămpi sînt date în figura 7.38. Lampa cu filament metalic (caracteristica *1*) are coeficientul de temperatură pozitiv, iar lampa cu filament de cărbune (caracteristica *2*) are coeficientul de temperatură negativ.

Aceste caracteristici se pot aproxima analitic prin expresia:

$$I = aU - bU^3, \tag{7.116}$$

unde $b > 0$ — pentru filamentul metalic și $b < 0$ — pentru filamentu de cărbune.

b) Termistoarele sînt rezistoare neliniare simetrice, constituite dintr-un amestec de materiale semiconductoare de tipul oxizilor de fier, nichel,

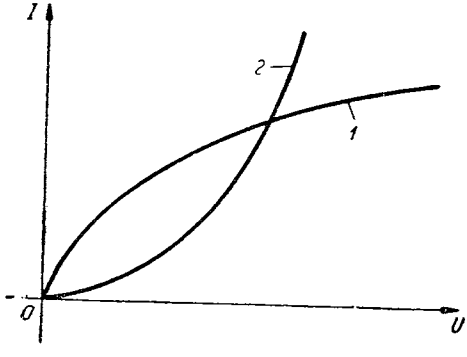


Fig. 7.38.

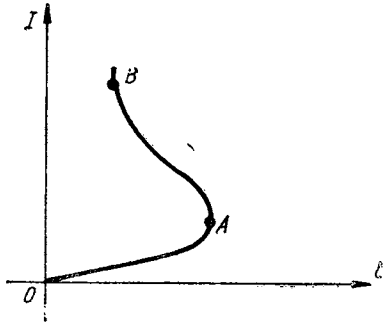


Fig. 7.39.

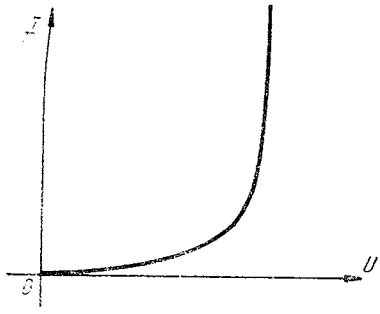


Fig. 7.40

mangan etc. Caracteristica curent-tensiune a unui termistor seamănă cu cea a lămpii cu filament de cărbune. Pentru unele termistoare caracteristica prezintă o zonă (porțiunea $A-B$ din figura 7.39) pentru care rezistența dinamică este negativă.

c) Varistoarele sînt rezistoare neliniare simetrice, obținute prin presarea la temperaturi ridicate a unui amestec de carbură de siliciu și grafit. Varistorul este cunoscut și sub denumirea de tirit sau vilit. Caracteristica varistorului (fig. 7.40) prezintă un palier pentru care tensiunea la borne se păstrează constantă în limite largi de variație a curentului prin rezistor. Forma parabolică a caracteristicii poate fi aproximată prin relația:

$$I = a \cdot U^n; \quad (n = 3{,}5 \div 7). \tag{7.117}$$

Varistoarele sînt utilizate în practică în tehnica tensiunilor înalte, pentru protecția instalațiilor de înaltă tensiune (centrale, stații electrice, transformatoare etc) împotriva supratensiunilor.

d) Tubul cu descărcări luminiscente (tub umplut cu neon sau cu alt gaz inert la presiune scăzută) este un rezistor neliniar cu histerezis, avînd caracteristică simetrică față de origine dacă electrozii tubului sînt identici. Tubul luminiscent se mai numește „tub stabilovolt", deoarece caracteristica sa (fig. 7.41) prezintă un pronunțat palier pentru care tensiunea la bornele sale se păstrează constantă (tensiunea este „stabilizată" la valoarea U_s). Pentru a putea îndeplini funcția de stabilizator de tensiune, tubul luminiscent trebuie „aprins", adică trebuie aplicată la borne o tensiune U_a (de aprindere) mai mare decît tensiunea stabilizată U_s.

e) Arcul electric între electrozi identici prezintă o caracteristică neliniară, simetrică, cu histerezis (fig. 7.42).

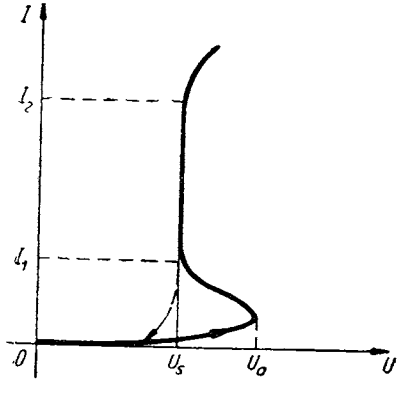


Fig. 7.41.

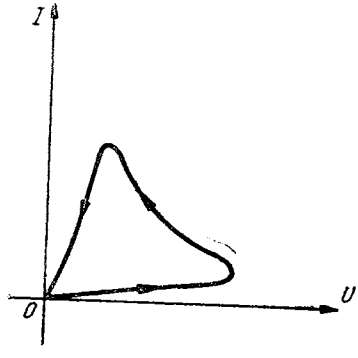


Fig. 7.42.

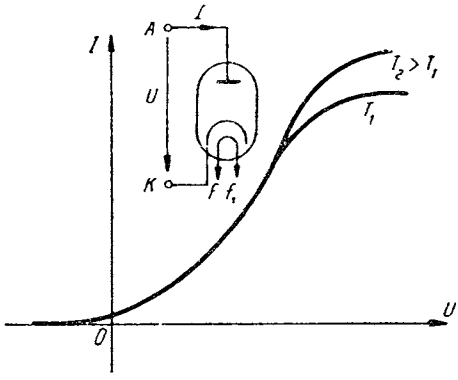


Fig. 7.43.

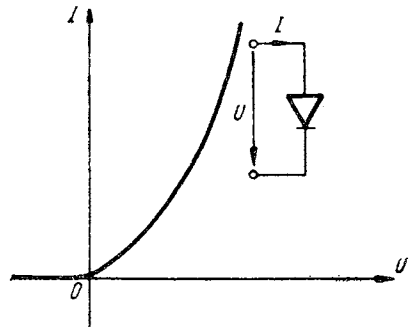


Fig. 7.44.

f) Dioda electronică este un rezistor neliniar cu caracteristică nesimetrică (fig. 7.43), utilizată în practică pentru redresarea curenților alternativi.

Caracteristica neliniară a diodei electronice poate fi aproximată în porțiunea puternic ascendentă prin relația:

$$I = k \cdot U^{3/2}. \tag{7.118}$$

Caracteristica diodei electronice prezintă la tensiuni mari o zonă de „saturație" a curentului. Modificarea curentului în această zonă se poate face numai prin încălzirea suplimentară a catodului lămpii ($T_2 > T_1$).

g) Diodele semiconductoare (cu siliciu, germaniu, seleniu etc) sînt rezistoare neliniare cu caracteristică nesimetrică, utilizate în principal pentru redresarea curenților alternativi. Caracteristica unei diode semiconductoare este dată în figura 7.44. Ea poate fi aproximată prin ecuația:

$$I = \frac{k}{2}(U + |U|), \tag{7.119}$$

valabilă atît pentru tensiuni pozitive, cît și pentru tensiuni negative aplicate la bornele diodei.

Din categoria diodelor semiconductoare fac parte diodele care utilizează efecte speciale în semiconductoare: efectul Zener, sau efectul „tunel".

D i o d a Z e n e r funcționează pe porțiunea din cadranul trei a caracteristicii din figura 7.44, unde se pune în evidență un pronunțat palier în care tensiunea la bornele diodei se păstrează practic constantă în limite largi de variație a curentului prin diodă (fig. 7.45). Această diodă este utilizată în practică pentru stabilizarea tensiunii (la valoarea U_s).

D i o d a t u n e l are caracteristica multiformă, prezentînd o zonă ($A-B$ în fig. 7.46) în care rezistența dinamică a diodei este negativă. Se utilizează în tehnica frecvențelor înalte.

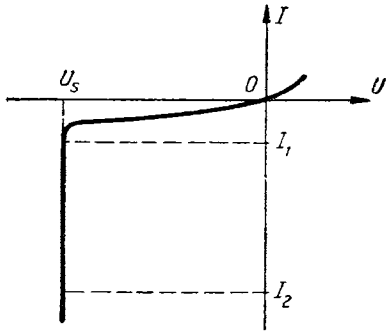


Fig. 7.45

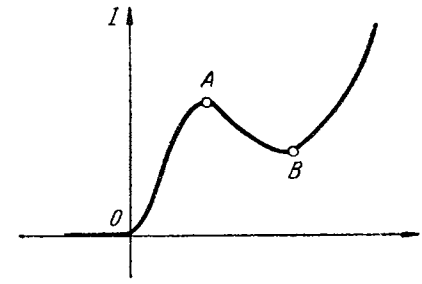


Fig. 7.46.

7.4.2. Teoreme și relații pentru circuite neliniare de curent continuu

Pentru analiza circuitelor de curent continuu rămîn valabile legile generale ale teoriei circuitelor (legea lui Ohm și legea lui Joule—Lenz), cît și acele teoreme care au fost demonstrate fără a face apel la principiul suprapunerii efectelor (teoremele lui Kirchhoff și teoremele generatoarelor echivalente). Formularea acestor legi și teoreme este specifică circuitelor de curent continuu neliniare.

a) Legea lui Ohm aplicată unei laturi de circuit care conține și un rezistor neliniar se scrie:

$$E \pm U = RI + R_{sn} \cdot I, \tag{7.120}$$

unde R_{sn} reprezintă *rezistența statică* a rezistorului *neliniar* (dependentă de curent). Semnul (+) corespunde unei laturi receptoare (fig. 7.47, *a*), iar semnul (—) corespunde unei laturi generatoare (fig. 7.47, *b*).

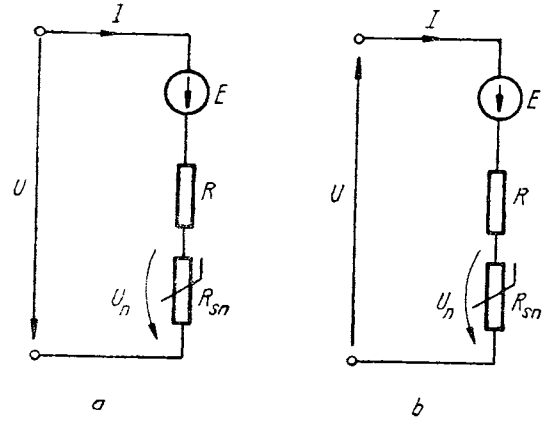


Fig. 7.47.

Relația (7.120) poate fi pusă și sub forma echivalentă:

$$E \pm U = RI + U_n, \tag{7.121}$$

unde U_n este *căderea de tensiune* la bornele rezistorului *neliniar* (dependentă de curent).

b) Legea lui Joule—Lenz aplicată unei laturi ce conține un rezistor neliniar (fig. 7.47) este:

$$EI \pm UI = RI^2 + R_{sn}I^2, \tag{7.122}$$

echivalentă cu

$$EI \pm UI = RI^2 + U_nI, \tag{7.123}$$

unde:

EI (pozitiv sau negativ) reprezintă puterea cedată sau absorbită de generator;

UI (pozitiv sau negativ) — puterea absorbită sau cedată la bornele laturii;

RI^2 (nenegativ) — puterea absorbită de rezistorul liniar;

$R_{sn}I^2$ (nenegativ) — puterea absorbită de rezistorul neliniar.

c) Teoremele lui Kirchhoff se scriu sub forma:

$$\sum_{k \in q} I_k = 0, \quad (q = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{7.124}$$

pentru un nod q (fig. 7.48) și

$$\sum_{k \in p} E_k = \sum_{k \in p} R_k I_k + \sum_{k \in p} R_{snk} I_k, \quad (p = 1, 2, \ldots, L - N + 1) \tag{7.125}$$

echivalentă cu

$$\sum_{k \in p} E_k = \sum_{k \in p} R_k I_k + \sum_{k \in p} U_{nk}, \tag{7.126}$$

pentru o buclă p (fig. 7.49).

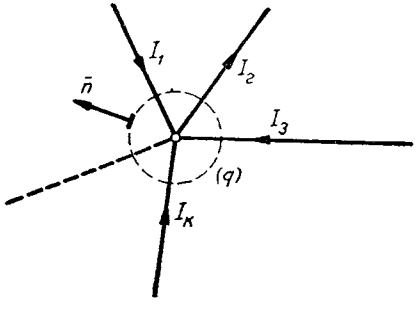


Fig. 7.48.

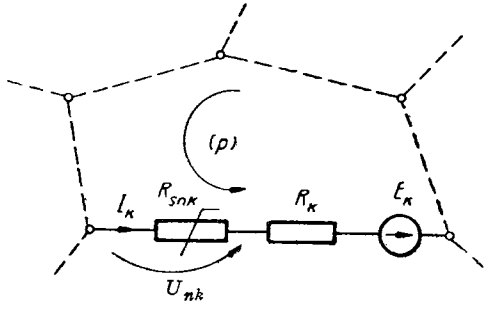


Fig. 7.49.

d) Teoremele lui Kirchhoff pentru mici componente lent variabile se scriu pentru un circuit aflat într-o stare de referință caracterizată prin mărimile: E_{k0} (tensiunile electromotoare), U_{k0} (căderile de tensiune la bornele rezistoarelor neliniare) și I_{k0} (curenții din rezistoarele neliniare). Dacă există mici variații lente ale tensiunilor electromotoare $\mathrm{d}E_{k0}$, atunci apar mici variații lente atît pentru căderile de tensiune $\mathrm{d}U_{k0}$ cît și pentru curenți $\mathrm{d}I_{k0}$. În noua stare, tensiunile electromotoare vor fi $E_k = E_{k0} + \mathrm{d}E_{k0}$, căderile de tensiune vor fi $U_k = U_{k0} + \mathrm{d}U_{k0}$, iar curenții vor fi $I_k = I_{k0} + \mathrm{d}I_{k0}$.

Se scriu teoremele lui Kirchhoff în ambele stări ale circuitului (presupunînd că în circuit există numai rezistoare neliniare):

$$\sum_{k\in q} I_{k0} = 0; \quad \sum_{k\in p} E_{k0} = \sum_{k\in p} U_{k0} \tag{7.127}$$

$$\sum_{k\in q}(I_{k0} + \mathrm{d}I_{k0}) = 0; \quad \sum_{k\in p}(E_{k0} + \mathrm{d}E_{k0}) = \sum_{k\in p}(U_{k0} + \mathrm{d}U_{k0}) \tag{7.128}$$

și se scad relațiile (7.127) și (7.128) obținîndu-se mai întîi

$$\sum_{k\in q} \mathrm{d}I_{k0} = 0, \tag{7.129}$$

apoi

$$\sum_{k\in p} \mathrm{d}E_{k0} = \sum_{k\in p} \mathrm{d}U_{k0}. \tag{7.130}$$

Dacă se ține cont de dezvoltarea Taylor:

$$\mathrm{d}U_{k0} = U_k - U_{k0} = \left(\frac{\partial U_k}{\partial I_k}\right)_0 \mathrm{d}I_{k0}, \tag{7.131}$$

(în care s-au neglijat infiniții mici de ordin superior) și de definiția rezistenței dinamice $R_{\mathrm{d}k0} = \left(\frac{\partial U_k}{\partial I_k}\right)_0$, relația (7.130) devine:

$$\sum_{k\in p} \mathrm{d}E_{k0} = \sum_{k\in p} \mathrm{d}I_{k0} \cdot R_{dk0}. \tag{7.132}$$

Relațiile (7.129) și (7.132) reprezintă teoremele lui Kirchhoff pentru mici componente lent variabile. Aceste teoreme scrise pentru *variații mici* în jurul unui punct de funcționare (E_{k0}, U_{k0}, I_{k0}) sînt identice cu cele de la circuitele liniare cu observația că în acest caz apar rezistențele dinamice ale elementelor neliniare.

e) Teoremele generatoarelor echivalente (de tensiune și de curent) se pot aplica circuitelor neliniare care conțin rezistoare neliniare numai pe o singură latură. Latura cu rezistoare neliniare se separă între bornele $A-B$ (fig. 7.50, *a*). Circuitul incomplet (în stînga bornelor $A-B$) constituie un dipol liniar activ, căruia i se poate atașa o schemă echivalentă cu generator de tensiune (fig. 7.50, *b*) sau cu generator de curent (fig. 7.50, *c*).

În schemele echivalente, mărimile din circuit au următoarele semnificații: U_{AB0} reprezintă tensiunea la bornele AB cînd latura cu rezistor neliniar este întreruptă; R_{AB0} — rezistența rețelei liniare (în stînga

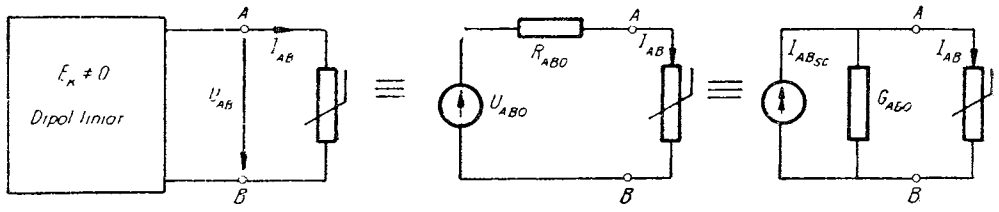


Fig. 7.50.

bornelor AB din figura 7.50, *a*) cînd sursele sînt pasivizate şi latura cu rezistor neliniar este întreruptă; I_{ABsc} — curentul de scurtcircuit între bornele AB $\left(I_{ABsc} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB0}}\right)$, iar $G_{AB0} = \frac{1}{R_{AB0}}$.

f) Transferul de putere prin rezistoare neliniare. În circuite liniare, transferul maxim de putere de la sursă la receptor avea loc în situaţia în care rezistenţa internă a generatorului R_i era egală cu rezistenţa receptorului $R(R_i = R)$.

În figura 7.51 se consideră un circuit în care sursa E transferă putere rezistorului liniar R, prin intermediul rezistorului neliniar cunoscut prin caracteristica sa $U_n(I)$.

Legea lui Joule-Lenz (7.123) aplicată acestui circuit conduce la relaţia:

$$RI^2 = EI - U_nI, \tag{7.133}$$

unde $RI^2 = P_2$ reprezintă puterea consumată de receptor. Pentru ca această putere să fie maximă, se face derivata relaţiei (7.133) şi se egalează cu zero:

$$\frac{\partial P_2}{\partial I} = (E - U_n) - I\frac{\partial U_n}{\partial I} = 0. \tag{7.134}$$

Din teorema a doua a lui Kirchhoff rezultă $E - U_n = RI$, apoi conform definiţiei, $\frac{\partial U_n}{\partial I}$ reprezintă rezistenţa dinamică R_d a rezistorului neliniar $\left(R_d = \frac{\partial U_n}{\partial I}\right)$, astfel încît condiţia de transfer maxim a puterii (7.134) se reduce la relaţia:

$$R = R_d. \tag{7.135}$$

În concluzie, pentru circuitul din figura 7.51 se produce un transfer maxim de putere de la sursa E la rezistorul liniar R, dacă rezistenţa receptorului R este egală cu rezistenţa dinamică R_d a rezistorului neliniar prin care are loc transferul de putere.

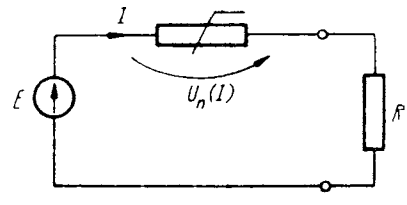


Fig. 7.51.

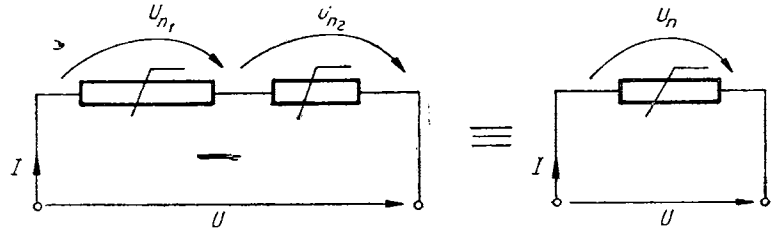


Fig. 7.52.

7.4.3. Transformarea schemelor circuitelor neliniare de curent continuu

a) Conectarea în serie a două rezistoare neliniare este echivalentă cu un singur rezistor neliniar (fig. 7.52).

Caracteristica rezistorului neliniar echivalent se poate determina dacă se cunosc caracteristicile celor două rezistoare neliniare din schema inițială. Presupunînd date grafic caracteristicile celor două rezistoare neliniare (fig. 7.53), sub forma $U_{n1} = f_1(I)$ și $U_{n2} = f_2(I)$, se aplică teorema a doua a lui Kirchhoff,

$$U = U_{n1} + U_{n2}, \tag{7.136}$$

valabilă pentru orice valoare a curentului din circuit. Alegînd o valoare arbitrară a curentului din circuit I' (același pentru ambele rezistoare neliniare, deoarece ele sînt conectate în serie), se determină din caracteristici căderile de tensiune U'_{n1} și U'_{n2} la bornele celor două rezistoare neliniare. Conform relației (7.136) se obține tensiunea la borne $U' = U'_{n1} + U'_{n2}$, adică în grafic se obține punctul de coordonate (I', U'). Procedînd în mod analog pentru mai multe valori ale curentului (I', I' etc.) se obțin valorile corespunzătoare ale tensiunii la borne (U', U'' etc.). Unind punctele obținute (perechile de valori I', U'; I'', U''; etc.) se determină caracteristica $U = f(I)$ care reprezintă tocmai caracteristica rezistorului neliniar echivalent.

Dacă se cere rezolvarea circuitului din figura 7.52, cînd la bornele sale este aplicată tensiunea U_0, atunci în prealabil se determină grafic (fig. 7.53) caracteristica echivalentă $U = f(I)$, din care rezultă curentul I_0 și căderile de tensiune pe cele două rezistoare, așa cum se indică prin săgețile din figura 7.53.

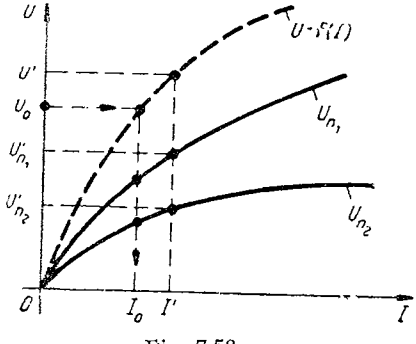


Fig. 7.53.

Observație

Un circuit neliniar compus dintr-un rezistor neliniar dat prin caracteristica sa $U_n(I)$, conectat în serie cu un rezistor liniar R și alimentat de la o sursă E (fig. 7.54, *a*) poate fi rezolvat grafic fără a fi nevoie de a determina caracteristica echivalentă conectării în serie a celor

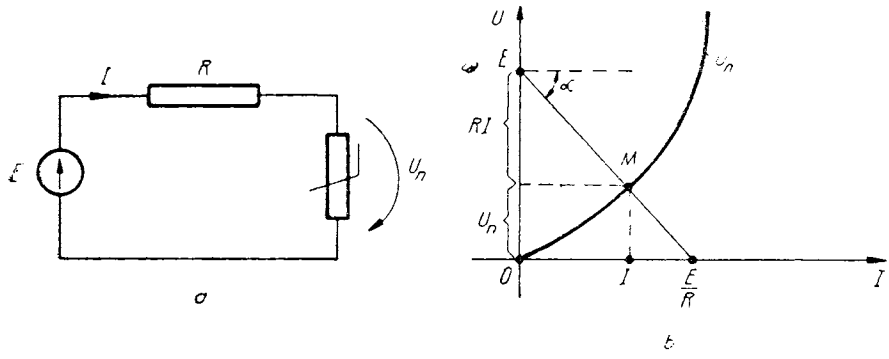


Fig. 7.54.

două rezistoare. Pentru aceasta se aplică legea lui Ohm (relația 7.121), obținîndu-se ecuația circuitului:

$$E - RI = U_n. \tag{7.137}$$

Rezolvarea grafică a ecuației (7.137) este dată în figura 7.54, *b*. Se construiește dreapta $U = E - RI$, avînd tăieturile pe cele două axe egale cu $\frac{E}{R}$ și respectiv E (se mai poate observa că există relația tg $\alpha = R$). Intersecția acestei drepte cu caracteristica neliniară $U_n(I)$ reprezintă soluția ecuației (7.137). Abscisa punctului M de intersecție este curentul I din circuit, iar ordonata sa este tensiunea la bornele rezistorului neliniar U_n. Tensiunea la bornele rezistorului liniar, conform (7.137), este $RI = E - U_n$.

b) Conectarea în paralel a două rezistoare neliniare este echivalentă cu un singur rezistor neliniar (fig. 7.55). Caracteristica rezistorului neliniar echivalent se poate determina cunoscînd caracteristicile parțiale $I_{n1} = f_1(U)$ și $I_{n2} = f_2(U)$ ale celor două rezistoare neliniare (fig. 7.56). Pentru aceasta se aplică teorema întîi a lui Kirchhoff valabilă pentru orice valoare a tensiunii la borne:

$$I = I_{n1} + I_{n2}. \tag{7.138}$$

Alegînd o valoare arbitrară a tensiunii la borne U' (aceeași pentru ambele rezistoare neliniare, deoarece sînt conectate în paralel), se obțin din grafic curenții I'_{n1} și I'_{n2} în cele două rezistoare. Conform relației (7.138) se obține

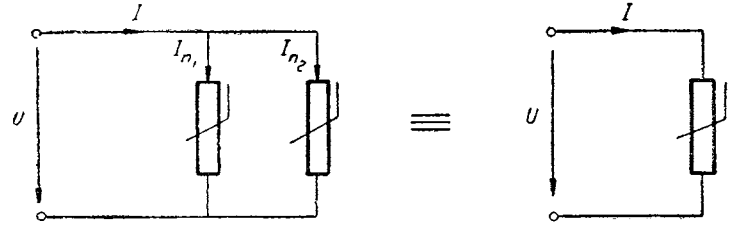


Fig. 7.55.

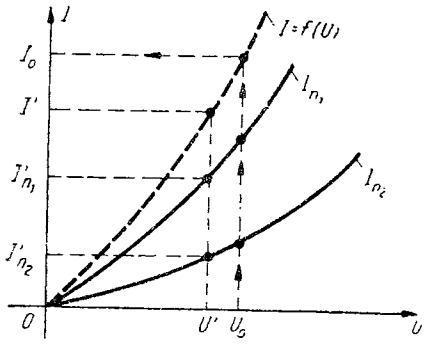


Fig. 7.56.

curentul prin rezistorul echivalent $I' = I'_{n1} + I'_{n2}$. Perechea de valori U', I' reprezintă un punct de pe caracteristica rezistorului neliniar echivalent. Procedînd în mod analog pentru mai multe valori ale tensiunii la borne (U', U'' etc.) se obţin valorile curentului din circuit (I', I'' etc.). Unind punctele obţinute (perechile de valori U', I'; $U''I''$ etc.) rezultă caracteristica $I = f(U)$ care reprezintă tocmai caracteristica rezistorului neliniar echivalent.

Dacă se cere rezolvarea circuitului din figura 7.55, cînd la bornele sale este aplicată tensiunea U_0, atunci în prealabil se determină caracteristica echivalentă $I = f(U)$ şi ordonatele punctelor de intersecţie ale dreptei $U = U_0$ cu caracteristicile I_{n1}, I_{n2} şi $I = f(U)$ reprezintă curenţii din cele două rezistoare şi respectiv curentul absorbit de la sursă.

c) Conectarea în serie a unui rezistor neliniar cu o sursă este echivalentă cu un rezistor neliniar (fig. 7.57).

Presupunînd cunoscută grafic caracteristica neliniară a rezistorului $U_n = f_1(I)$ cît şi valoarea t.e.m. a sursei E, se aplică legea lui Ohm

$$U = U_n - E, \tag{7.139}$$

obţinîndu-se caracteristica rezistorului neliniar echivalent, $U = f_2(I) = f_1(I) - E$, adică grafic se translatează caracteristica iniţială $U_n = f_1(I)$ cu cantitatea $(-E)$, aşa cum se arată în figura 7.58. Dacă sursa de t.e.m. (fig. 7.57) are sens contrar curentului din circuit, translaţia caracteristicii are loc cu cantitatea $(+E)$.

Observaţie

Din figurile 7.58 şi 7.57 rezultă că orice rezistor neliniar care are o caracteristică *ce nu trece prin origine* poate fi înlocuit cu un rezistor neliniar avînd caracteristica ce trece prin origine conectat în serie cu o sursă.

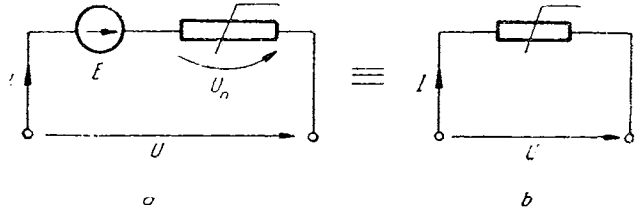


Fig. 7.57.

7.4.4. Exemple de rezolvare a circuitelor neliniare de curent continuu

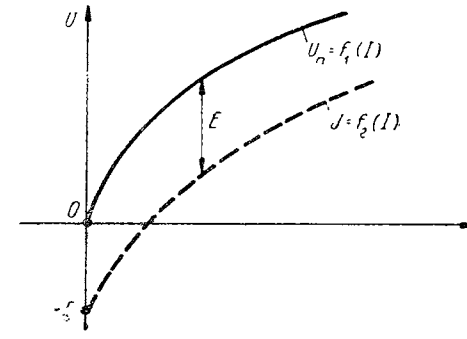


Fig. 7.58.

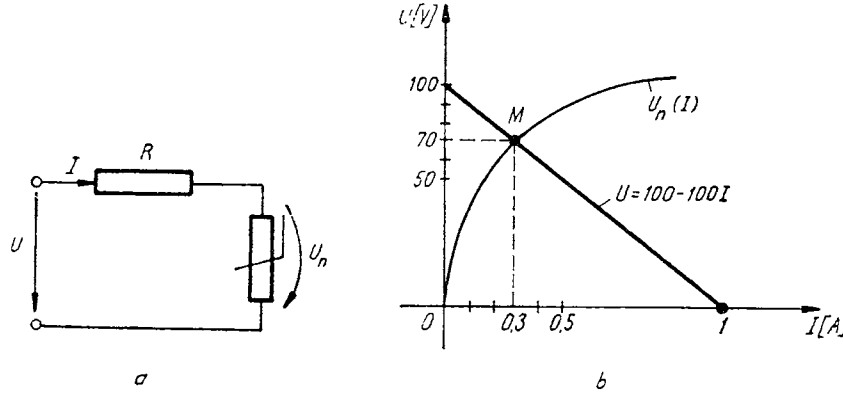
Pentru rezolvarea circuitelor neliniare de curent continuu se utilizează legile şi teoremele expuse în par. 7.4.2. Dacă se cunosc caracteristicile rezistoarelor neliniare date sub formă grafică, este mai comod să se rezolve circuitul neliniar prin procedee grafice. Procedeele analitice de rezolvare a circuitelor neliniare, deşi au uneori un grad mare de exactitate, necesită un volum mai mare de calcule, iar aceste procedee devin complicate atunci cînd funcţia de aproximare a caracteristicii neliniare este un polinom cu gradul mai mare decît doi sau este o funcţie transcendentă.

Exemple

1. Circuitul neliniar din figura 7.59, *a*, constituit dintr-un rezistor liniar cu rezistenţa $R = 100\ \Omega$ conectat în serie cu un rezistor neliniar avînd caracteristica dată grafic în figura 7.59, *b*, este alimentat la o tensiune $U = 100$ V. Se cere curentul din circuit şi căderile de tensiune la bornele celor două rezistoare.

Rezolvarea problemei se face grafic utilizînd procedeul expus în par. 7.4.3. Pentru aceasta, scriind ecuaţia circuitului $U = RI + U_n$, cu valorile numerice ale problemei rezultă $U_n = 100 - 100\ I$. Se construieşte prin tăieturi dreapta $U = 100 - 100\ I$, care intersectată cu caracteristica neliniară $U_n(I)$ determină punctul de funcţionare M al circuitului. Din grafic rezultă: $I = 0{,}3$ A, $U_n = 70$ V şi $RI = 30$ V.

2. Un rezistor neliniar avînd caracteristica dată sub formă analitică, $U = 100\ I^3$ [V], este conectat în serie cu un rezistor liniar avînd rezistenţa $R = 100\ \Omega$. Circuitul fiind alimentat la tensiunea $U = 100$ V, se cere să se determine curentul din circuit şi căderile de tensiune la bornele rezistoarelor.



Fg. 7.59.

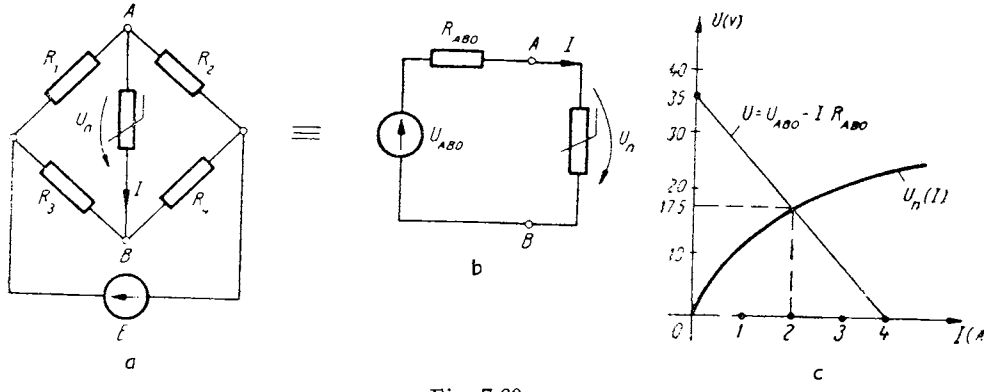


Fig. 7.60.

Aplicînd legea lui Ohm, rezultă relaţia $U = RI + U_n$, care, numeric devine: $100 = 100\,I + 100\,I^3$. Soluţia acestei ecuaţii este $I = 0{,}69$ [A]. Căderile de tensiune vor fi: $RI = 69$ V şi $U_n = 31$ V.

3. În diagonala punţii din figura 7.60, *a* se află un rezistor neliniar a cărui caracteristică $U_n(I)$ este dată grafic în figura 7.60, *c*. Rezistoarele liniare au rezistenţele: $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$; $R_3 = 15\ \Omega$; $R_4 = 5\ \Omega$. Alimentînd puntea de la o sursă cu t.e.m. $E = 140$ V se cer curentul prin rezistorul neliniar şi tensiunea la bornele acestuia.

Se separă latura neliniară între bornele $A-B$, şi conform teoremei generatorului echivalent de tensiune se obţine schema din figura 7.60, *b*, în care:

$$U_{AB0} = E\left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) = 35\ \text{V};\quad R_{AB0} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{175}{20}\ \Omega.$$

Cu aceste valori, rezolvarea grafică a problemei este indicată în figura 7.60, *c* (vezi şi exemplul 1). Din grafic rezultă curentul din rezistorul neliniar, $I = 2$ A şi tensiunea la bornele lui, $U_n = 17{,}5$ V.

CAPITOLUL 8

CÎMPUL MAGNETIC ÎN VID

Existența cîmpului magnetic se constată în vecinătatea magneților permanenți sau a circuitelor parcurse de curenți. Un ac magnetic adus în vecinătatea unui conductor parcurs de curent tinde să se orienteze perpendicular pe acesta. Mai multe conductoare parcurse de curenți electrici se atrag sau se resping, în funcție de sensul curenților prin conductoare. Toate aceste fenomene sînt manifestări ale cîmpului magnetic. Cîmpul magnetic, deci, exercită forțe asupra circuitelor parcurse de curent. Aceste forțe în cîmp magnetic se împart în: forțe electrodinamice (între curenți); forțe electromagnetice (între curenți și corpuri magnetizate); magnetostatice (între magneți).

8.1. CÎMPUL MAGNETIC. INDUCȚIA MAGNETICĂ

Cîmpul magnetic e acea formă de existență a materiei care se manifestă prin forțe sau cupluri de forțe, ce acționează asupra corpurilor magnetizate sau asupra conductoarelor parcurse de curenți.

Explorarea cîmpului magnetic se face cu un corp de probă. Cel mai potrivit corp de probă este o mică spiră foarte subțire parcursă de curent numită *buclă de curent*, reprezentată teoretic în figura 8.1, *a* și realizată practic ca în figura 8.1, *b*. Bucla se caracterizează prin vectorul

$$\overline{m}_b = i \cdot \bar{A} = i \cdot A \cdot \overline{n}, \quad (8.1)$$

numit momentul buclei. Dacă bucla are mai multe spire (N) atunci aria ei se scrie $A = N \cdot A_s$, unde A_s este aria unei singure spire.

Dacă se aduce bucla de curent în spațiul unde se presupune că există

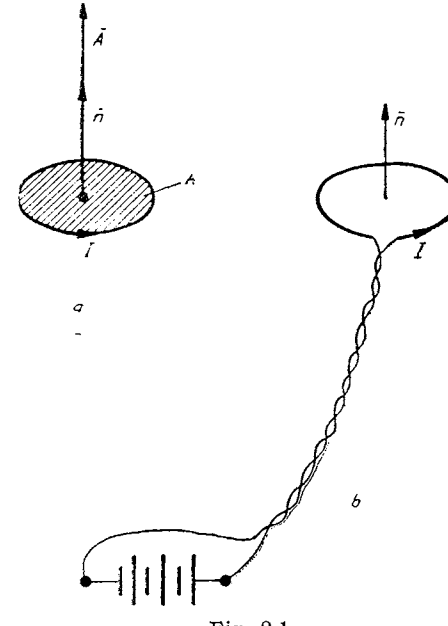


Fig. 8.1.

cîmp magnetic, asupra ei se exercită acțiuni mecanice. Se constată că asupra buclei se exercită cu cuplu de forțe dat de relația vectorială:

$$\bar{C} = \bar{m}_b \times \bar{B}_v, \tag{8.2}$$

sau:

$$\bar{C} = i \cdot \bar{A} \times \bar{B}_v. \tag{8.3}$$

Mărimea $\bar{B}_v$ se numește *inducția magnetică în vid* și se măsoară în *tesla* (T). Din (8.3) unitatea de măsură rezultă:

$$[\bar{B}_v] = \frac{[\bar{C}]}{[i][\bar{A}]} = \frac{1\text{N} \cdot 1\text{m}}{1\text{A} \cdot 1\text{m}^2} = \frac{1\text{N}}{1\text{A} \cdot 1\text{m}} = 1\ \text{T}.$$

8.2. FORȚE PARTICULARE ÎN CÎMP MAGNETIC

Acțiunile ponderomotoare (forțe sau cupluri de forțe) în cîmp magnetic prezintă un deosebit interes în electrotehnică, ele constituind baza unor importante și numeroase aplicații tehnice. Forțele particulare la care se referă acest paragraf (forța Lorentz, forța Laplace, forța lui Ampère) au fost studiate și determinate inițial pe cale experimentală, dar ele se pot deduce teoretic în cazurile cele mai generale (forțele generalizate, tensiuni maxwelliene).

8.2.1. Forța care se exercită asupra unui mic corp încărcat electric aflat în mișcare în cîmp magnetic (forța Lorentz sau forța magnetică)

Experiența arată că asupra unui mic corp încărcat cu sarcina electrică Δq, care se deplasează cu viteza $\bar{v}$ într-un cîmp magnetic de inducție $\bar{B}_v$, se exercită forța:

$$\Delta\bar{F} = \Delta q\, \bar{v} \times \bar{B}_v, \tag{8.4}$$

avînd direcția perpendiculară atît pe direcția de deplasare, cît și pe direcția liniilor cîmpului magnetic.

Conform relației (8.4) se pot face următoarele precizări: asupra unei sarcini aflate în repaus ($\bar{v} = 0$) nu acționează cîmpul magnetic; forța magnetică este maximă dacă direcția de deplasare a sarcinii este perpendiculară pe liniile de cîmp ($\bar{v} \perp \bar{B}_v$); forța magnetică este nulă dacă sarcina se deplasează pe linia de cîmp magnetic ($\bar{v} \parallel \bar{B}_v$).

În stabilirea experimentală a relației (8.4) s-a presupus că în domeniul considerat există numai cîmp magnetic. Dacă însă există și cîmp electric, asupra sarcinii va acționa suplimentar și cîmpul electric (vezi cap. 1) cu o forță $\Delta\bar{F} = \Delta q \cdot \bar{E}_v$, astfel încît în cazul general asupra unei particule încărcate aflată în mișcare în cîmp electromagnetic va acționa forța rezultantă:

$$\Delta\bar{F} = \Delta q \cdot \bar{E}_v + \Delta q \cdot \bar{v} \times \bar{B}_v = \Delta q(\bar{E}_v + \bar{v} \times \bar{B}_v). \tag{8.5}$$

Expresia generală a forței (8.5) are aplicații practice la studiul mișcării particulelor elementare în cîmp electromagnetic (de exemplu în acceleratoare de particule).

8.2.2. Forța care se exercită asupra unui element de conductor parcurs de curent electric aflat într-un cîmp magnetic (forța Laplace sau forța electromagnetică)

Măsurînd forța $\Delta\bar{F}$ ce se exercită asupra unui element de conductor de lungime $\Delta\bar{l}$ parcurs de curentul i și situat într-un cîmp magnetic de inducție $\bar{B}_v$ se constată experimental că există relația:

$$\overline{\Delta F} = i\,\Delta\bar{l} \times \bar{B}_v. \tag{8.6}$$

Sensul forței este dat de produsul vectorial $\overline{\Delta l} \times \overline{B}_v$. Forța electromagnetică este maximă cînd conductorul este perpendicular pe liniile de cîmp ($\Delta\bar{l} \perp \bar{B}_v$) și este zero cînd conductorul este orientat după direcția liniilor de cîmp ($\Delta\bar{l} \parallel \bar{B}_v$).

Expresia (8.6) a forței lui Laplace se poate deduce din expresia (8.4) a forței lui Lorentz. Astfel, dacă în (8.4) se explicitează viteza sub forma $\bar{v} = \frac{\Delta\bar{l}}{\Delta t}$, forța lui Lorentz devine:

$$\overline{\Delta F} = \frac{\Delta q}{\Delta t}\,\overline{\Delta l} \times \overline{B}_v = i\Delta\bar{l} \times \bar{B}_v, \tag{8.6'}$$

relație identică cu (8.6).

Forța lui Laplace (8.6) se referă la conductoare filiforme parcurse de curentul i.

În cazul conductoarelor masive ($\bar{J} \neq$ const.), se introduce noțiunea de densitate de volum a forței:

$$\bar{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\bar{F}}{\Delta V}. \tag{8.7}$$

Dacă în (8.7) se notează (vezi fig. 8.2):

$$\Delta i = \bar{J} \cdot \Delta\bar{A}, \tag{8.8}$$

rezultă:

$$\Delta\bar{F} = \Delta\bar{A} \cdot \bar{J} \cdot \Delta\bar{l} \times \bar{B}_v,$$

sau

$$\Delta\bar{F} = \bar{J} \times \bar{B}_v \cdot \Delta\bar{l} \cdot \Delta\bar{A},$$

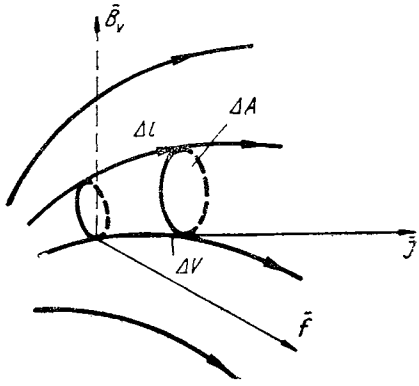


Fig. 8.2.

sau încă:

$$\Delta \bar{F} = \bar{J} \times \bar{B}_v \cdot \Delta V, \qquad (8.9)$$

care cu (8.7) conduce la:

$$f = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\bar{J} \times \bar{B}_v \cdot \Delta V}{\Delta V} = \bar{J} \times \bar{B}_v. \qquad (8.10)$$

Din punctul de vedere al aplicațiilor practice forța lui Laplace (8.6) constituie baza funcționării motoarelor electrice. Densitatea de volum a forței (8.10) este o noțiune importantă în cazul unor conductoare masive parcurse de curent (de exemplu în cazul „pompelor magnetice", care pompează un lichid parcurs de curent electric, sub influența unui cîmp magnetic exterior).

Observație

Introducerea mărimii $\bar{B}_v$ (inducția magnetică în vid) în studiul cîmpului magnetic s-a efectuat (relația 8.2) prin intermediul buclei de curent. Este posibil însă de a defini inducția magnetică în vid $\bar{B}_v$ prin intermediul forței Lorentz (8.4) sau a forței Laplace (8.6). Se subliniază că cele trei moduri de definire a mărimii $\bar{B}_v$ sînt echivalente. S-a arătat prin relația (8.6') echivalența dintre forța lui Lorentz și forța lui Laplace. Se poate arăta în continuare echivalența dintre relațiile (8.3) și (8.6). Pentru aceasta, se consideră (fig. 8.3) o buclă de curent sub formă de spiră circulară plasată într-un cîmp magnetic uniform ($\bar{B}_v$ = const. în orice punct), liniile de cîmp avînd orientarea în planul spirei.

Asupra elementului de conductor $d\bar{l}$, acționează forța lui Laplace $\overline{dF} = i\overline{dl} \times \bar{B}_v$, avînd direcția perpendiculară pe planul spirei (vezi fig. 8.3), iar modulul său fiind $dF = i \cdot dl \cdot B_v \sin \alpha$. Cuplul elementar creat de cele două forțe simetrice, față de axa MN se scrie: $dC = 2R \sin \alpha \cdot dF = 2RiB_v \cdot dl \sin^2\alpha$ sau $dC = R^2 iB_v \cdot 2 \sin^2\alpha \cdot d\alpha$.

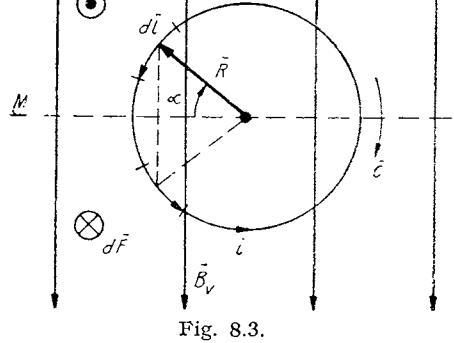


Fig. 8.3.

Cuplul rezultant va fi:

$$C = R^2 iB_v \int_0^{\pi} 2 \sin^2\alpha \cdot d\alpha = \pi R^2 iB_v,$$

însă aria spirei fiind $A = \pi R^2$, rezultă expresia cuplului identică cu (8.3).

8.2.3. Forța electrodinamică (forța lui Ampère)

Dacă două conductoare (fig. 8.4) sînt paralele, filiforme, infinit lungi și parcurse de curenții i_1 și i_2 se

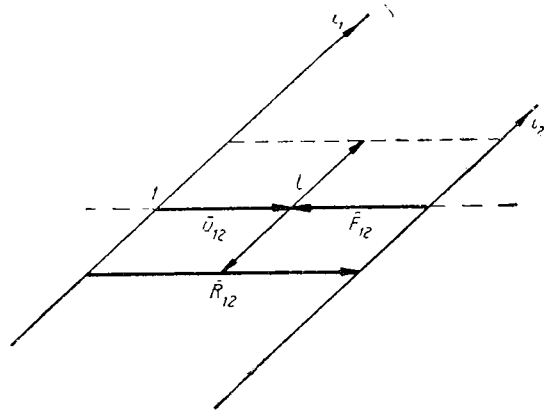


Fig. 8.4.

constată experimental că asupra lor se exercită o forță dată de relația:

$$\bar{F}_{12} = -k\frac{2i_1 i_2}{R_{12}} l \cdot \bar{u}_{12}. \tag{8.11}$$

Forța o exercită cîmpul magnetic al conductorului *1* asupra curentului i_2 din conductorul al doilea (vezi și par. 8.3). Forța este de atracție dacă curenții au același sens și este de respingere dacă curenții au sensuri contrare.

Dacă se ia $k = 10^{-7}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$, atunci se definește amperul ca fiind *intensitatea curentului continuu, constant, care menținut în două conductoare paralele infinit lungi, așezate în vid la distanța de 1 m, se atrag sau se resping cu o forță de* $2 \cdot 10^{-7}$ *newtoni pe metrul de lungime.*

Se obișnuiește a se nota:

$$\mu_0 = 4\pi k = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ henry/metru}, \tag{8.12}$$

iar această constantă universală (μ_0) se numește *permeabilitate absolută* a vidului.

Raportul între inducția magnetică în vid $\bar{B}_v$ și constanta universală μ_0 se numește *intensitatea cîmpului magnetic* în vid $\bar{H}_v$:

$$\bar{H}_v = \frac{\bar{B}v}{\mu_0}. \tag{8.13}$$

Introducînd pe μ_0, formula lui Ampère se scrie:

$$\bar{F}_{12} = -\mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi R_{12}} \cdot l \cdot \bar{u}_{12}. \tag{8.14}$$

Aceasta este forma „rațională" a forței lui Ampère și ea corespunde sistemului internațional de unități. Formula prezintă simetrie cilindrică prin termenul $2\pi R_{12}$.

Cunoașterea forțelor electrodinamice prezintă importanță în practică mai ales la proiectarea aparatelor și instalațiilor electrice industriale. Solicitările electrodinamice ale aparatelor electrice din stații sau posturi de transformare devin periculoase mai ales în cazuri de avarii (cum ar fi curenții de scurtcircuit).

8.3. FORMULA LUI BIOT–SAVART–LAPLACE

Prin experiență, Biot și Savart au stabilit următoarea formulă pentru calculul intensității cîmpului magnetic $\overline{H}_v$, produs în vid de un circuit filiform închis, parcurs de curentul continuu i:

$$\overline{H}_v = \frac{\overline{B}_v}{\mu_0} = \frac{i}{4\pi} \oint_\Gamma \frac{\overline{ds} \times \overline{R}}{R^3}; \tag{8.15}$$

Laplace a demonstrat teoretic această formulă (vezi cap. 9).

Semnificația mărimilor care intervin în (8.15) este dată în figura 8.5.

Unitatea de măsură a intensității cîmpului magnetic $\overline{H}_v$ rezultă din (8.15) și se numește *amper pe metru* (A/m).

Formula lui Biot-Savart-Laplace, deși se referă la un contur închis prin care circulă curentul electric, poate fi aplicată și pentru contururi deschise, care se închid la infinit.

Exemple

1. Calculul cîmpului magnetic produs în vid de un conductor rectiliniu, filiform, infinit lung (fig. 8.6).

Se utilizează formula lui Biot-Savart-Laplace. Elemente care intervin în integrala (8.15) sînt arătate pe figură. Conturul de integrare, deși se consideră de data aceasta deschis, el se închide practic la infinit (deoarece curentul trebuie să circule pe drumuri închise). Punctul M în care se calculează cîmpul magnetic se află la o distanță d de axa conductorului filiform.

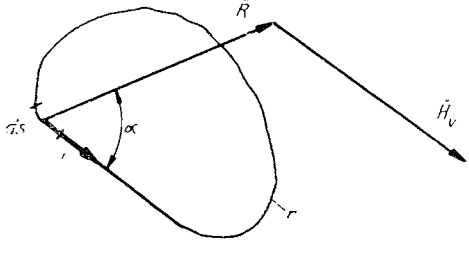


Fig. 8.5.

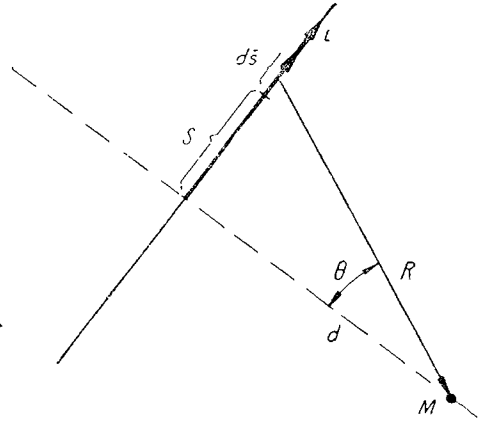


Fig. 8.6.

Din considerente geometrice, rezultă:

$$s = d \cdot \operatorname{tg} \theta, \text{ apoi } ds = d \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}. \tag{8.16}$$

De asemenea, $R = \dfrac{d}{\cos \theta}$. (8.17)

Produsul vectorial $\overline{ds} \times \overline{R}$ în modul este: $|\overline{ds} \times \overline{R}| = ds \cdot R \cdot \cos \theta$ (8.18)

Din (8.16), (8.17) și (8.18) rezultă:

$$|\overline{H}_v| = \frac{i}{4\pi} \oint_\Gamma \frac{R \cdot \cos \theta \cdot ds}{R^3} = \frac{i}{4\pi} \int \frac{d}{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta \frac{\cos^2 \theta}{d^2} \cdot d\theta = \frac{i}{4\pi d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta = \frac{i}{2\pi d}. \tag{8.19}$$

Direcția cîmpului este după tangenta la cercul cu raza d, iar sensul cîmpului magnetic se află aplicînd regula burghiului drept. Rezultă că în punctul M cîmpul magnetic este perpendicular pe planul figurii, dirijat dinspre noi către planul figurii.

2. Cîmpul magnetic produs în centrul unei spire circulare, de către curentul i care străbate spira (fig. 8.7).

Conturul de integrare Γ este de această dată închis. Vectorii $\overline{ds}$ și $\overline{R}$ sînt perpendiculari, deci produsul lor vectorial este în modul:

$$|\overline{ds} \times \overline{R}| = ds \cdot R \tag{8.20}$$

În integrala (8.15) mărimea R este constantă pe tot conturul închis Γ, deci se poate scoate de sub semnul integral. Rezultă:

$$H_v = \frac{i}{4\pi} \oint_\Gamma \frac{R}{R^3} \cdot ds = \frac{i}{4\pi R^2} \oint_\Gamma ds = \frac{i}{2R}. \tag{8.21}$$

Direcția cîmpului este perpendiculară pe ds și R (deci pe planul spirei). Sensul cîmpului magnetic este figurat pe desen, dedus cu regula burghiului drept.

8.4. TENSIUNE MAGNETOMOTOARE. SOLENAȚIE

Prin analogie cu tensiunea electromotoare:

$$e = \oint_\Gamma \overline{E} \cdot \overline{ds}, \tag{8.22}$$

se indroduce noțiunea de *tensiune magnetomotoare* prin relația:

$$U_{mm} = \oint_\Gamma \overline{H}_v \cdot \overline{ds}. \tag{8.23}$$

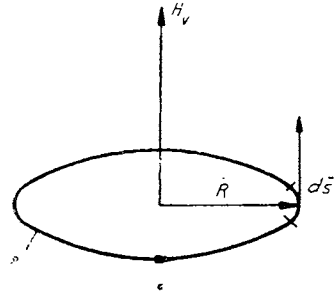


Fig. 8.7.

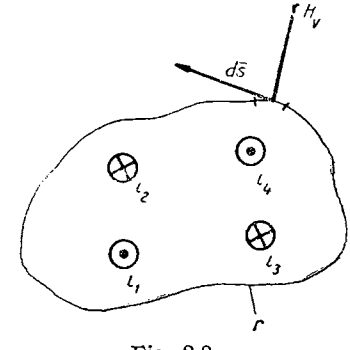


Fig. 8.8.

Efectuînd experienţe asupra curenţilor continui, A m p è r e a găsit următoarea expresie pentru integrala (8.23):

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}_v \cdot \overline{ds} = \sum i_k, \tag{8.24}$$

integrală care se calculează conform figurii 8.8. În membrul drept al relaţiei (8.24) intră toţi curenţii care înlănţuie conturul Γ, cu semnul luat după regula burghiului drept. Astfel, pentru exemplul din figura 8.8 se poate scrie:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}_v \cdot \overline{ds} = i_1 - i_2 - i_3 + i_4. \tag{8.25}$$

În general, cînd conturul de integrare străbate mai multe bobine, avînd fiecare un număr N de spire, relaţia (8.24) se scrie:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}_v \cdot \overline{ds} = \sum N \cdot i. \tag{8.26}$$

Membrul al doilea al relaţiei (8.26) se numeşte *solenaţie* şi se notează cu θ. De reţinut că *numai în curent continuu* tensiunea magnetomotoare este egală cu solenaţia. În regim variabil, această egalitate nu mai este adevărată (vezi cap. 9). Unitatea de măsură a tensiunii magnetomotoare U_{mm} cît şi a solenaţiei θ rezultă din (8.26) şi se numeşte *amper* (uneori i se mai spune *amper-spiră*).

Exemple

1. Calculul cu ajutorul formulei lui Ampère (relaţia 8.24) *al cîmpului magnetic produs în vid de un conductor filiform, rectiliniu, parcurs de curentul i* (fig. 8.9).

Se consideră conturul închis Γ de forma unui cerc, într-un plan perpendicular pe conductor, concentric cu axa conductorului. În relaţia (8.24), $\overline{H}_v$ şi $\overline{ds}$ sînt coliniari şi datorită si-

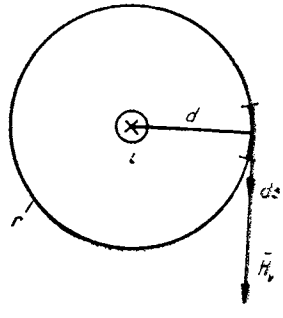


Fig. 8.9.

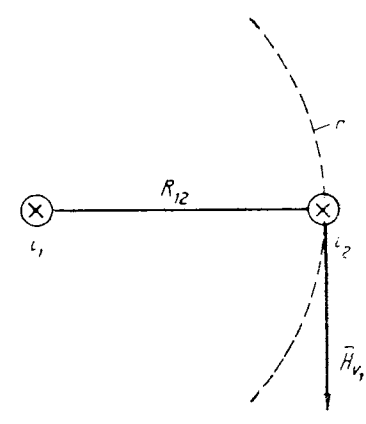


Fig. 8.10.

metriei, $\overline{H}_v$ este constant pe întreg conturul și poate fi scos în afara semnului integral. Se obține:

$$H_v \oint_{\Gamma} \mathrm{d}s = i, \tag{8.27}$$

apoi:

$$H_v = \frac{i}{2\pi \mathrm{d}}, \tag{8.28}$$

expresie care a fost obținută cu ajutorul formulei lui Biot-Savart-Laplace.

2. Deducerea expresiei forței electrodinamice, plecînd de la expresia forței electromagnetice a lui Laplace (fig. 8.10).

În punctul unde se află plasat conductorul al doilea, valoarea intensității cîmpului magnetic produs de primul conductor H_{v1} este dată de relația (8.28):

$$H_{v1} = \frac{i_1}{2\pi R_{12}}, \text{ iar inducția magnetică este:}$$

$$B_{v1} = \mu_0 \cdot H_{v1} = \mu_0 \cdot \frac{i_1}{2\pi R_{12}}. \tag{8.29}$$

Conductorul al doilea se află deci într-un cîmp magnetic de inducție B_{v1} și asupra lui se va exercita forța lui Laplace:

$$\Delta F_{12} = i_2 \Delta l \cdot B_{v1} = \mu_0 \frac{i_1 \cdot i_2}{2\pi R_{12}} \Delta l \tag{8.30}$$

(ceea ce trebuia demonstrat).

CAPITOLUL 9

CÎMPUL MAGNETIC ÎN SUBSTANȚĂ

9.1. MAGNETIZARE TEMPORARĂ ȘI PERMANENTĂ. MAGNETIZAȚIE

În natură există anumiți oxizi de fier care au proprietatea de a produce cîmp magnetic în jurul lor. Aceștia erau cunoscuți în Asia Mică încă din antichitate. Magneții permanenți pot fi produși și în mod artificial prin introducerea materialelor feromagnetice într-un cîmp magnetic.

Se spune că un corp este magnetizat sau se află în stare de magnetizare dacă el este supus unor forțe și cupluri cînd este adus într-un cîmp magnetic. Această stare de magnetizare poate fi *permanentă* (nu depinde de valoarea inducției magnetice) sau *temporară* (depinde de valoarea inducției magnetice în care este introdus corpul).

Caracterizarea acestei stări, pentru corpuri cu dimensiuni mici, se face cu mărimea vectorială $\bar{m}$, numită *moment magnetic*, analog cu momentul buclei $\bar{m}_b = i \cdot \bar{A}$ (par. 8.1).

Cuplul și forța ce se exercită asupra unui mic corp magnetizat sînt:

$$\bar{C} = \bar{m} \times \bar{B}_v \tag{9.1}$$

$$\bar{F} = \left(\bar{m}\frac{\partial \bar{B}_v}{\partial x}\right)\bar{i} + \left(\bar{m}\frac{\partial \bar{B}_v}{\partial y}\right)\bar{j} + \left(\bar{m}\frac{\partial \bar{B}_v}{\partial z}\right)\bar{k}. \tag{9.2}$$

Forța apare numai în cîmpuri neuniforme. Sensul relației (9.1) poate fi arătat în figura 9.1.

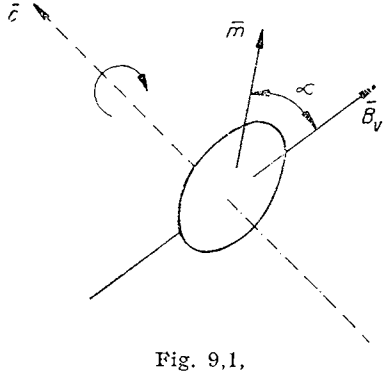


Fig. 9,1.

În cazul corpurilor cu dimensiuni mari, avem de-a face cu un moment magnetic rezultant, dat de suma vectorială a momentelor magnetice $\bar{m}_k$ ale părților elementare:

$$\Delta\bar{m} = \Sigma\bar{m}_k. \tag{9.3}$$

Limita raportului dintre $\Delta\bar{m}$ și volumul ΔV, cînd acest volum tinde la zero, se

numește intensitatea de magnetizare sau *magnetizație*:

$$\bar{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \bar{m}}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\bar{m}}{\mathrm{d}V}. \qquad (9.4)$$

Cu relația (9.4) momentul magnetic al unui corp cu dimensiuni mari este;

$$\bar{m} = \int_V \bar{M} \cdot \mathrm{d}V. \qquad (9.5)$$

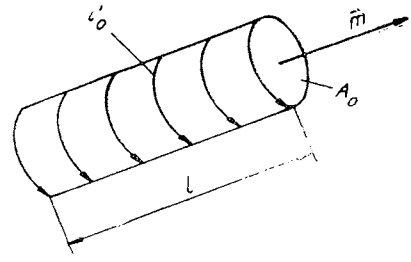


Fig. 9.2.

La baza explicării magnetizării corpurilor, conform teoriei lui Ampère, stau așa-zișii curenți moleculari. Dacă se consideră un mic corp (fig. 9.2) prin care circulă curenții moleculari i'_0, fiecare din acești curenți moleculari formează cîte o buclă de curent al cărui moment este:

$$\bar{m}_b = i'_0 \cdot \bar{A}_0. \qquad (9.6)$$

Momentul magnetic rezultant, conform (9.3), va fi:

$$\bar{m} = \Sigma i'_0 \cdot \bar{A}_0. \qquad (9.7)$$

Cu relația (9.4) rezultă magnetizația:

$$\bar{M} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Sigma i'_0 \bar{A}_0}{\bar{A}_0 \cdot \Delta \bar{l}} = \frac{\mathrm{d}i'_0}{\mathrm{d}l} \cdot \bar{n}_0. \qquad (9.8)$$

Pentru o repartiție uniformă a curenților moleculari, rezultă:

$$\bar{M} = \frac{\Sigma i'_0}{l} \cdot \bar{n}_0 \qquad (9.9)$$

Relația (9.9) spune că magnetizația este egală cu suma curenților moleculari de pe unitatea de lungime a corpului magnetizat.

Unități de măsură. Din relația (8.24) rezultă unitatea de măsură a intensității cîmpului magnetic $\bar{H}_v$:

$$[\bar{H}_v] = \left[\frac{i}{l}\right] = 1 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \text{ (amper pe metru).} \qquad (9.10)$$

Din relația (9.9), rezultă unitatea de măsură a magnetizației:

$$[M] = \frac{[i'_0]}{[l]} = 1 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}, \qquad (9.11)$$

deci mărimile $\bar{H}_v$ și $\bar{M}$ au aceeași unitate de măsură (amper pe metru).

9.2. INTERPRETAREA MICROSCOPICĂ A MAGNETIZAȚIEI

Fiecare magnet avînd doi poli, în trecut a fost admisă ipoteza sarcinilor (maselor) magnetice, analoage celor electrice. Dar experimental nu s-au putut separa acestea. Ampère a emis ipoteza că la scară microscopică un

corp magnetizat poate fi echivalent cu o buclă de curent al cărui moment magnetic este $\overline{m} = \overline{m}_b = i \cdot \bar{A}$. El presupune că magnetizarea provine din curenți care circulă la nivelul moleculelor formînd așa-zise bucle de curent.

Pentru un atom, momentul său magnetic se compune din momentele magnetice datorită mișcărilor electronilor pe orbită (orbital) și datorită rotirii particulelor în jurul axelor lor (moment de spin). Orientările acestor momente sînt haotice datorită agitației termice. Sub acțiunea unui cîmp magnetic exterior corpul capătă un moment magnetic rezultant din punct de vedere macroscopic, proporțional cu valoarea cîmpului $\overline{H}$ (vezi și par. 9.3), pentru substanțe ce au numai magnetizare temporară:

$$\overline{M}_t = \chi_m \overline{H}. \tag{9.12}$$

Relația (9.12) reprezintă *legea magnetizației temporare*, unde χ_m este o constantă de material numită *susceptivitate magnetică*. Ea poate fi pozitivă sau negativă. Substanțele pentru care $\chi_m > 0$ se numesc paramagnetice (de exemplu aluminiul), iar cele pentru care $\chi_m < 0$ se numesc diamagnetice (cuprul).

Substanțele paramagnetice au moleculele cu moment magnetic spontan (substanțe polare) și cîmpul magnetic exterior orientează în direcția cîmpului aceste momente.

Cele diamagnetice nu au inițial moment magnetic spontan. Ele capătă, printr-un fenomen de inducție electromagnetică, un moment magnetic care se opune cîmpului exterior, deci $\chi_m < 0$.

O clasă specială de substanțe paramagnetice sînt substanțele feromagnetice caracterizate printr-o susceptibilitate magnetică χ_m pozitivă și foarte mare.

9.3. INTENSITATEA CÎMPULUI MAGNETIC ȘI INDUCȚIA MAGNETICĂ ÎN SUBSTANȚĂ. LEGI SPECIFICE

Pentru definirea mărimilor ce caracterizează cîmpul magnetic în interiorul corpurilor magnetizate se va proceda în mod analog cu electrostatica (vezi cap. 2). Pentru aceasta, se practică o cavitate vidă în jurul punctului P (fig. 9.3) din substanța magnetizată, și se măsoară cu ajutorul buclei de curent (vezi cap. 8) inducția magnetică în această cavitate vidă $\bar{B}_{cav}$. Se constată experimental că oricît de mică ar fi cavitatea vidă, inducția magnetică din cavitate $\bar{B}_{cav}$ depinde de forma și orientarea cavității. În cazul unor cavități cu forme particulare (canal sau fantă) se pot defini intensitatea cîmpului magnetic și inducția magnetică din interiorul corpurilor magnetizate.

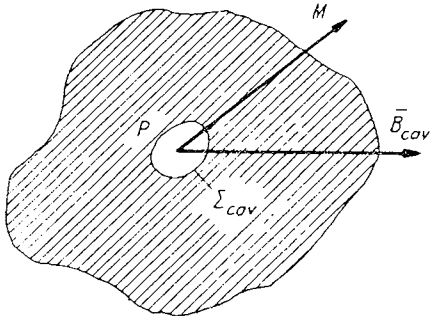


Fig. 9.3.

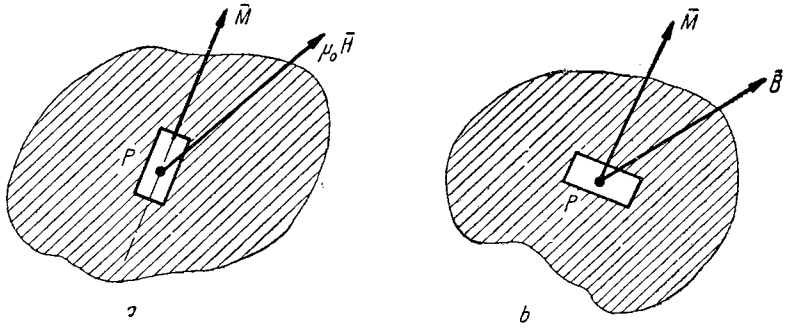


Fig. 9.4.

9.3.1. Intensitatea cîmpului magnetic în interiorul corpurilor magnetizate

Dacă se practică o cavitate vidă sub forma unui canal cilindric foarte îngust (generatoarea este mult mai mare decît diametrul bazei cilindrului), avînd axul orientat după direcția magnetizației $\bar{M}$ (fig. 9.4, *a*), măsurînd indicația magnetică în acest canal se constată că ea este egală cu produsul dintre permeabilitatea vidului μ_0 și o mărime $\bar{H}$ numită *intensitatea cîmpului magnetic*. Deci, se definește intensitatea cîmpului magnetic din interiorul unui corp magnetizat prin relația:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_{canal \parallel M}. \tag{9.13}$$

O mărime scalară derivată, definită prin intermediul vectorului intensitate cîmp magnetic $\bar{H}$, este *tensiunea magnetică* între două puncte din cîmp:

$$U_{mAB} = \int_A^B \bar{H} \cdot \bar{\mathrm{d}s}. \tag{9.14}$$

Ca și pentru tensiunea electrică, trebuie definit un sens de referință deoarece $U_{mAB} = -U_{mBA}$. Dacă cîmpul magnetic este irotațional, tensiunea magnetică între două puncte nu depinde de drum.

Dacă drumul de integrare este închis, integrala $\oint_\Gamma \bar{H} \cdot \bar{\mathrm{d}s} = U_{mm}$ se numește tensiune magnetomotoare, care în regim staționar este egală cu solenația (vezi rel. 8.26).

Intensitatea cîmpului magnetic în substanță $\bar{H}$ se măsoară în amper pe metru (A/m), iar tensiunea magnetică U_m în amper (A).

9.3.2. Inducția magnetică în interiorul corpurilor magnetizate

Dacă se practică în jurul punctului P din interiorul corpului magnetizat o fantă vidă (un cilindru foarte plat, avînd generatoarea mult mai mică decît diametrul bazei), cu bazele perpendiculare pe direcția magnetizației

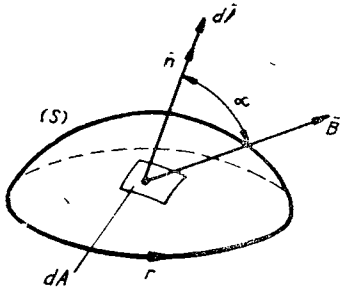


Fig. 9.5.

(fig. 9.4, *b*), măsurînd inducția magnetică $\bar{B}_v$ în această fantă vidă se constată că ea este egală cu inducția magnetică existentă în substanță $\bar{B}$, înainte de practicarea fantei. Deci se definește inducția magnetică în substanța magnetizată prin relația:

$$\bar{B} = \bar{B}_{fantă \perp \bar{M}}. \tag{9.15}$$

O mărime scalară derivată, definită cu ajutorul vectorului inducție magnetică, este *fluxul magnetic* prin suprafața deschisă S:

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot \overline{dA}. \tag{9.16}$$

Sensul de integrare ales, adică sensul vectorului $\overline{dA} = \bar{n} \cdot dA$, se numește sens de referință. Pentru o suprafață S deschisă, care se sprijină pe un contur Γ (fig. 9.5) sensul normalei $\bar{n}$ se atașează după regula burghiului drept sensului de parcurgere al conturului.

În cîmp omogen ($\bar{B}$ = const.) și pentru o suprafață S plană, fluxul magnetic este:

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos \alpha, \tag{9.17}$$

unde α este unghiul format de vectorii $\bar{B}$ și $\overline{dA}$.

Inducția magnetică $\bar{B}$ se măsoară în tesla (T), iar fluxul magnetic Φ se măsoară în Weber (wb), existînd relația: $1\text{T} = \frac{1\ \text{Wb}}{\text{m}^2}$.

9.3.3. Legea magnetizației temporare

Magnetizarea corpurilor poate fi permanentă (cînd nu depinde de cîmpul magnetic exterior) sau temporară (cînd depinde de cîmpul magnetic exterior). Corespunzător acestor stări, vectorul magnetizație $\bar{M}$ are două componente,

$$\bar{M} = \bar{M}_p + \bar{M}_t. \tag{9.18}$$

în care $\bar{M}_p$ este *magnetizația permanentă*, independentă de cîmpul magnetic exterior, iar $\bar{M}_t$ este *magnetizația temporară*, dependentă de intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$ în care se introduce corpul supus magnetizării.

Legea magnetizației temporare se referă la această legătură dintre $\bar{M}_t$ și $\bar{H}$. Experiența arată că în cazul mediilor magnetice liniare și izotrope este satisfăcută următoarea *lege de material*: în fiecare punct și în orice moment, magnetizația temporară este proporțională cu intensitatea cîmpului magnetic:

$$\bar{M}_t = \chi_m \bar{H}, \tag{9.19}$$

factorul de proporționalitate χ_m fiind o constantă de material numită *susceptivitate magnetică a mediului* (mărime adimensională).

Spre deosebire de susceptivitatea electrică χ_e, care este întotdeauna pozitivă, cea magnetică χ_m poate fi atît pozitivă (materialul se numește în acest caz *paramagnetic*), cît și negativă (materialul se numește în acest caz *diamagnetic*). Drept urmare, cîmpul magnetic propriu al materialelor paramagnetice este de același sens cu cîmpul exterior, iar în cazul materialelor diamagnetice, cîmpul propriu este opus celui exterior. Susceptivitatea magnetică χ_m nu depinde de temperatură în cazul materialelor diamagnetice și variază invers proporțional cu temperatura pentru materialele paramagnetice.

În tabelul 9.1 se dau valorile susceptivității magnetice pentru cîteva materiale. Din tabel se constată valori foarte mici pentru χ_m, de ordinul 10^{-6} pînă la 10^{-3}. O clasă specială de substanțe care au susceptivitate magnetică foarte mare, de ordinul 10^2— 10^5, sînt substanțele feromagnetice (vezi par. 9.4).

Tabelul 9.1.

Materialul diamagnetic	χ_m	Materialul paramagnetic	χ_m
Bismut	$-170 \cdot 10^{-6}$	Aluminiu	$+22 \cdot 10^{-6}$
Cupru	$-10 \cdot 10^{-6}$	Aer	$+0{,}4 \cdot 10^{-6}$
Argint	$-19 \cdot 10^{-6}$	Platină	$+330 \cdot 10^{-6}$
Zinc	$-12 \cdot 10^{-6}$		

Materialele pentru care χ_m nu depinde de intensitatea cîmpului magnetic $\overline{H}$ se numesc materiale liniare, iar materialele care au χ_m dependent de $\overline{H}$ se numesc materiale neliniare (de exemplu materialele feromagnetice).

9.3.4. Legea legăturii dintre vectorii $\overline{B}$, $\overline{H}$ și $\overline{M}$

Experiența arată că în orice mediu și în orice regim al cîmpului eletromagnetic este satisfăcută egalitatea

$$\overline{B} = \mu_0(\overline{H} + \overline{M}), \tag{9.20}$$

numită legea legăturii dintre vectorii $\overline{B}$, $\overline{H}$ și $\overline{M}$, care se enunță astfel: *în fiecare punct și în orice moment vectorul inducție magnetică $\overline{B}$ este proporțional cu suma dintre vectorul intensitate a cîmpului magnetic $\overline{H}$ și vectorul magnetizație $\overline{M}$, factorul de proporționalitate fiind permeabilitatea magnetică a vidului μ_0.*

Această lege se utilizează de obicei împreună cu legea magnetizației temporare (9.19). Combinînd (9.19) cu (9.20), în ipoteza absenței magnetizației permanente, se obține relația:

$$\overline{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\overline{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \overline{H} = \mu \overline{H}, \tag{9.21}$$

unde,

$$\mu_r = 1 + \chi_m \tag{9.22}$$

se numește *permeabilitatea relativă* a mediului (mărime adimensională), iar

$$\mu = \mu_0 \mu_r \tag{9.23}$$

se numește *permeabilitatea absolută* a mediului (se măsoară ca și μ_0 în *henry pe metru*).

Permeabilitatea relativă a materialelor diamagnetice este mai mică decît 1 ($\mu_r < 1$), iar a materialelor paramagnetice este mai mare decît 1 ($\mu_r > 1$). Așa cum arată tabelul 9.1, permeabilitatea relativă a tuturor materialelor *în afară de cele feromagnetice* se poate considera egală cu 1, deoarece ele diferă între ele numai la a treia sau la a patra zecimală. Spre exemplu permeabilitatea relativă la cupru este $\mu_r = 1 - 10 \cdot 10^{-6} = 0{,}99999$, iar la aluminiu este $\mu_r = 1 + 22 \cdot 10^{-6} = 1{,}000022$.

9.3.5. Legea fluxului magnetic

Experiența arată că *fluxul magnetic (fluxul vectorului inducție magnetică $\bar{B}$) printr-o suprafață închisă este nul în orice moment, indiferent de forma suprafeței:*

$$\Phi_\Sigma = 0 \quad \text{sau} \quad \oint_\Sigma \bar{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = 0. \tag{9.24}$$

Aceasta este o lege generală, valabilă atît în regim staționar cît și în regim nestaționar. Legea fluxului magnetic exprimă faptul că nu există „sarcini magnetice" care pot fi separate, așa cum puteau fi separate sarcinile electrice.

Dacă se aplică relației (9.24) teorema lui Gauss — Ostrogradsky, se obține:

$$\oint_\Sigma \bar{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \int_{V_\Sigma} \mathrm{div} \cdot \bar{B} \cdot \mathrm{d}V = 0, \tag{9.25}$$

care conduce la

$$\mathrm{div}\ \bar{B} = 0. \tag{9.26}$$

Relația (9.26) reprezintă *forma locală* a legii fluxului magnetic: în orice moment și în fiecare loc divergența vectorului inducție magnetică este nulă. Inducția magnetică este un vector cîmp solenoidal (fără surse), liniile lui $\bar{B}$ sînt linii fără început și fără sfîrșit.

9.4. FEROMAGNETISMUL. TEORIA LUI WEISS

Materialele feromagnetice sînt: fierul, nichelul, cobaltul și aliajele lor. La baza explicării feromagnetismului stă teoria lui Weiss. După această teorie, materialul feromagnetic este constituit din domenii magnetice, magnetizate spontan la saturație. Direcțiile de magnetizare spontană se admit după cele 6 direcții ale muchiilor unui cub (fig. 9.6, *a*). Ca ordin de mărime, într-un cm^3 din materialul feromagnetic există circa 2 000

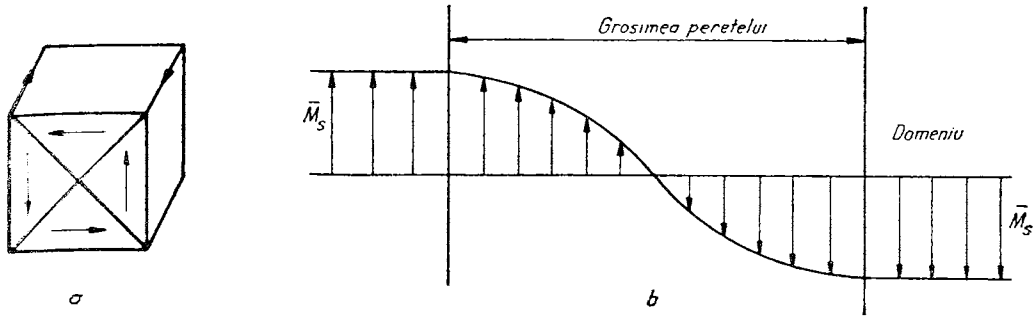


Fig. 9.6.

domenii. Ele sînt despărțite de niște pereți (numiți pereți Bloch) care au o grosime de circa 200 distanțe atomice. Structura unui perete Bloch poate fi urmărită în figura 9.6, *b*. Cele două domenii magnetizate la saturație în sensuri contrare sînt despărțite printr-un perete care face trecerea monotonă de la magnetizarea la saturație într-un sens la magnetizarea de saturație în sens contrar.

Dacă proba nu a mai fost magnetizată, domeniile magnetice au o orientare haotică astfel încît, din punct de vedere macroscopic dau o rezultantă nulă. Aplicînd probei un cîmp magnetic exterior, magnetizarea sa are loc în trei etape:

a) pentru cîmpuri slabe se produce o deplasare reversibilă a granițelor domeniilor, în sensul măririi domeniului a cărui magnetizare coincide cu direcția cîmpului exterior (fig. 9.7, *a*);

b) pentru cîmpuri mai mari, deplasarea granițelor domeniilor devine ireversibilă și această deplasare se produce prin salt;

c) pentru cîmpuri puternice se produce orientarea domeniilor în direcția cîmpului exterior. Această orientare se efectuează tot prin salt (fig. 9.7, *b*).

Dacă se reprezintă variația inducției magnetice în funcție de intensitatea cîmpului magnetic $B = f(H)$, în procesul de magnetizare descris, se observă că această dependență este neliniară. Curba prezintă trei zone corespunzătoare celor etape ale magnetizării. Prima zonă se numește zona magnetizării inițiale, a doua este zona magnetizării liniare, iar a treia este zona de saturație (fig. 9.8). În practică, prima zonă este atît de mică încît poate fi neglijată, astfel că în principiu curba de magnetizare prezintă o zonă liniară

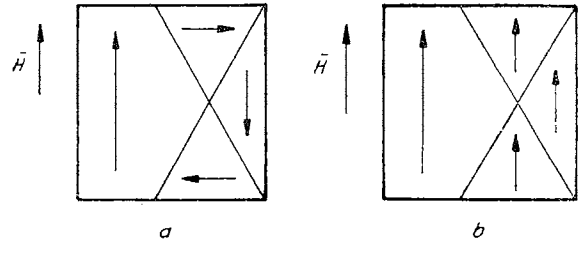


Fig. 9.7.

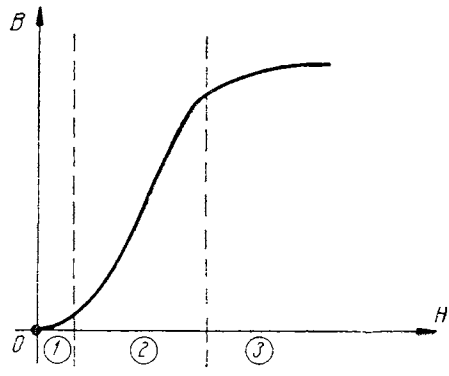


Fig. 9.8.

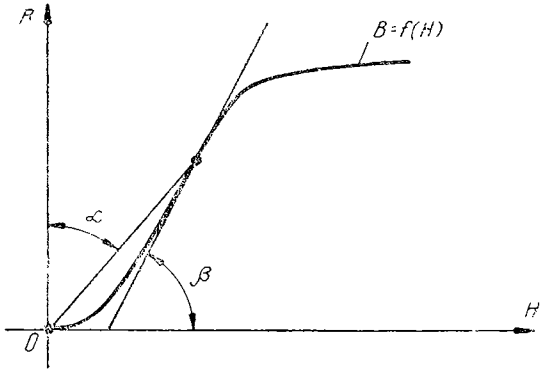


Fig. 9.9.

(caracteristica $B = f(H)$ este o dreaptă) și o zonă de saturație (inducția magnetică crește foarte puțin în funcție de cîmpul magnetic).

Permeabilitatea magnetică a substanțelor feromagnetice (relația 9.21) este dependentă de instensitatea cîmpului magnetic:

$$\mu = \frac{B}{H} = f(H). \tag{9.27}$$

Se definește o permeabilitate statică;

$$\mu_{st} = \frac{B}{H} = \operatorname{tg} \alpha \tag{9.28}$$

și o permeabilitate dinamică:

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} = \operatorname{tg} \beta, \tag{9.29}$$

care au semnificația din figura 9.9.

Variația permeabilității statice și dinamice în funcție de intensitatea cîmpului magnetic este reprezentată în figura 9.10.

Curba $B = f(H)$ din figura 9.8., care a fost obținută pentru un material magnetic care nu a mai fost magnetizat, se numește *curbă de primă magnetizare*. Dacă acum se scade strict monoton cîmpul, inducția magnetică nu mai urmărește curba de primă magnetizare ci rămîne la valori superioare, astfel încît pentru valoarea zero a cîmpului, materialul are o inducție egală cu B_r, numită inducție remanentă (fig. 9.11). Crescînd în continuare cîmpul, spre valori negative, inducția magnetică devine zero la o valoare a cîmpului egală cu H_c, numit cîmp coercitiv. Dacă procesul se continuă așa cum este indicat cu săgeată în figura 9.11, se obține o *buclă de histerezis* sau *ciclul de histerezis*.

După cum se va vedea în par. 13.2, suprafața acestui bucle reprezintă energia pierdută în unitatea de volum pentru magnetizarea probei respective. Explicația acestor pierderi prin histerezis este următoarea: deoarece la magnetizarea probei se produc deplasări bruște ale pereților dintre dome-

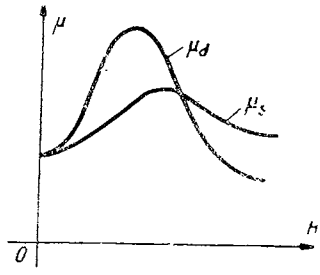


Fig. 9.10.

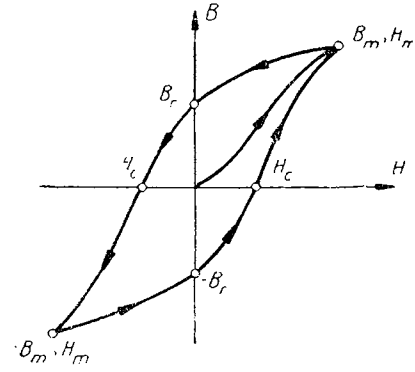


Fig. 9.11.

nii precum și orientarea bruscă a întregului domeniu, aceasta echivalînd cu variația fluxului magnetic, care conform legii inducției electromagnetice produce curenți și deci pierderi de energie prin efect Joule—Lenz.

Substanțele feromagnetice, în funcție de valoarea cîmpului coercitiv, se împart în materiale moi ($H_c < 100$ A/m) și materiale magnetice dure ($H_c > 4\,000$ A/m). Comparativ, ciclurile lor de histerezis sînt date în figura 9.12. Materialele moi au permeabilități mari și pierderi mici prin histerezis. Ele se utilizează la confecționarea circuitelor magnetice ale mașinilor și transformatoarelor electrice. Materialele dure se utilizează la confecționarea magneților permanenți.

În încheierea paragrafului trebuie spus faptul că proprietățile feromagnetice dispar dacă temperatura materialului depășește o anumită limită (punct Curie), care pentru fier este 760 °C, iar pentru nichel este de 360 °C.

9.5. POTENȚIALUL MAGNETIC VECTOR. ECUAȚIA LUI POISSON PENTRU CÎMPUL MAGNETIC

Pornind de la legea fluxului magnetic (relația 9.20), care ne spune că inducția $\overline{B}$ formează un cîmp solenoidal, deci $\overline{B}$ nu poate proveni dintr-un potențial scalar, se introduce un vector auxiliar $\overline{A}$ care să satisfacă relația:

$$\text{rot } \overline{A} = \overline{B}. \tag{9.30}$$

Vectorul $\overline{A}$ se numește potențialul magnetic vector al cîmpului magnetic. Această noțiune, nou introdusă, trebuie să satisfacă legea fluxului magnetic (relația 9.20). Într-adevăr, cum se știe din matematică, divergența unui rotor este identic nulă, deci

$$\text{div } \overline{B} = \text{div } (\text{rot } \overline{A}) = 0. \tag{9.31}$$

Potențialul magnetic vector nu are o semnificație fizică imediată, el se utilizează pentru calculul fluxului magnetic și pentru calculul inductivităților (vezi paragraful 11.2).

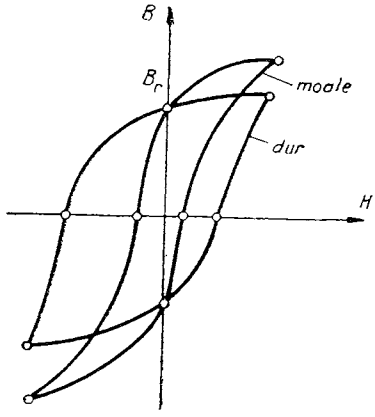


Fig. 9.12

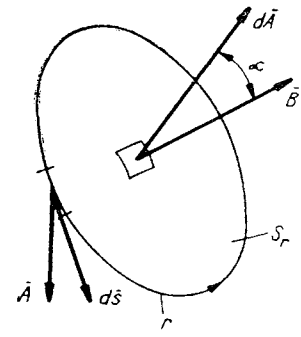


Fig. 9.13.

Dacă se consideră suprafața S_Γ, sprijinită pe conturul Γ (fig. 9.13), fluxul prin această suprafață va fi:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A}, \tag{9.32}$$

care, cu relația (9.30) devine:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \mathrm{rot}\ \overline{A} \cdot \overline{\mathrm{d}A}. \tag{9.33}$$

Aplicînd teorema lui Stokes, relația (9.33) se poate scrie:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \oint_{\Gamma} \overline{A} \cdot \overline{\mathrm{d}s}. \tag{9.34}$$

În această relație, $\overline{A}$ este potențialul magnetic vector, iar integrala se calculează cu elementele din figura 9.13, sensul integrării fiind stabilit după regula burghiului drept.

Pentru calculul fluxului magnetic cu relație (9.32), se impune a cunoaște valorile vectorului $\overline{B}$ în toate punctele suprafeței S_Γ, pe cînd la calculul fluxului cu relația (9.34) se impune a cunoaște valorile vectorului $\overline{A}$ numai pe conturul Γ, ceea ce este mult mai simplu.

Relația lui Ampère $\oint_\Gamma \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = \Sigma i$, se poate scrie, utilizînd teorema lui Stokes;

$$\int_{S_\Gamma} \mathrm{rot}\ \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \int_{S_\Gamma} \overline{J} \cdot \overline{\mathrm{d}A}, \tag{9.35}$$

care conduce la:

$$\mathrm{rot}\ \overline{H} = \overline{J}, \tag{9.36}$$

sau:

$$\mathrm{rot}\ \overline{B} = \mu \overline{J}, \tag{9.37}$$

deoarece $\overline{B} = \mu \overline{H}$.

Introducînd în relaţia (9.37) potenţialul magnetic vector (relaţia 9.30), rezultă:

$$\text{rot} \cdot \text{rot}\, \overline{A} = \mu \overline{J}. \qquad (9.38)$$

Dezvoltînd membrul întîi al relaţiei (9.38) sub forma:

$$\text{rot} \cdot \text{rot}\, \overline{A} = \text{grad} \cdot \text{div}\, \overline{A} - \overline{\Delta A},$$

şi impunînd condiţia ca:

$$\text{div}\, \overline{A} = 0, \qquad (9.39)$$

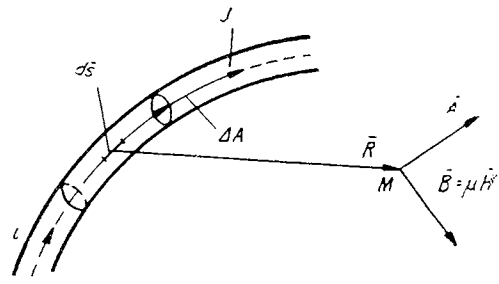


Fig. 9.14.

ceea ce înseamnă că vectorul $\overline{A}$ nu are surse (ca şi vectorul $\overline{B}$ de altfel), relaţia (9.38) se scrie:

$$\Delta \overline{A} = -\mu \overline{J}. \qquad (9.40)$$

Această relaţie, care este ecuaţia lui Poisson vectorială pentru cîmpul magnetic, seamănă formal cu ecuaţia lui Poisson scalară pentru cîmpul electric (v. par. 2.8.4). Soluţia ecuaţiei (9.40) va fi şi ea de aceeaşi formă cu soluţia ecuaţiei (2.55), deci:

$$\overline{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \overline{J} \frac{dV}{R}. \qquad (9.41)$$

Considerînd spre exemplu un circuit filiform (fig. 9.14) parcurs de curentul i şi avînd elementele din figură, expresia potenţialului magnetic vector într-un punct oarecare M se poate calcula cu integrala (9.41). În această integrală se poate pune: $\overline{J} \cdot dV = \overline{J} \cdot \overline{\Delta A} \cdot \overline{ds} = i \cdot \overline{ds}$, deci:

$$\overline{A} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_\Gamma \frac{\overline{ds}}{R}. \qquad (9.42)$$

Aceasta este expresia potenţialului magnetic vector al unui conductor filiform. În aceste relaţii, nu trebuie confundat simbolul potenţialului magnetic vector $\overline{A}$ cu simbolul elementului de arie $\overline{dA}$.

Cu ajutorul expresiei potenţialului magnetic vector, se poate demonstra foarte simplu formula lui Biot-Savart-Laplace. Astfel din (9.30) rezultă:

$$\overline{H} = \frac{\overline{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \text{rot}\, \overline{A}. \qquad (9.43)$$

Aplicînd rotorul relaţiei (9.42), se obţine:

$$\overline{H} = \frac{i}{4\pi} \oint_\Gamma \frac{\overline{ds} \times \overline{R}}{R^3}, \qquad (9.44)$$

ceea ce este tocmai formula lui Biot-Savart-Laplace, pentru calculul intensităţii cîmpului magnetic.

Această lege reprezintă o generalizare a formulei lui Ampère (8.24), care a fost stabilită în regim staționar (curent continuu). În regim nestaționar legea circuitului magnetic se scrie sub forma:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = \theta_{S_\Gamma} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S_\Gamma} \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A} \tag{9.45}$$

numită *forma integrală* a legii.

Primul termen din membrul drept reprezintă solenația: $\theta_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{J}\,\overline{\mathrm{d}A} = \Sigma i_\Gamma$, fiind suma tuturor curenților de conducție care înlănțuie curba Γ. Al doilea termen reprezintă derivata în raport cu timpul a fluxului electric prin suprafața S_Γ, mărginită de conturul Γ. Dacă suprafața S_Γ este fixă în spațiu, atunci termenul se exprimă astfel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S_\Gamma} \overline{D}\,\overline{\mathrm{d}A} = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \int_{S_\Gamma} \overline{J}_D \cdot \overline{\mathrm{d}A} = i_{D_\Gamma}, \tag{9.46}$$

unde $\overline{J}_D = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$ este densitatea curentului de deplasare i_{D_Γ} prin suprafața S_Γ. Deci un cîmp electric variabil în timp (echivalent prin curentul de deplasare) produce în jurul său un cîmp magnetic.

O distribuție de sarcină adevărată, în mișcare cu viteza $\bar{v}$, reprezintă un curent de convecție (transport) i_T și acesta creează cîmp magnetic în jurul său.

De asemenea un corp electric polarizat și aflat în mișcare cu viteza $\bar{v}$ creează în jurul său un cîmp magnetic. Un corp polarizat poate fi echivalat cu o distribuție echivalentă de sarcină de polarizație, aceste sarcini în mișcare reprezentînd un alt gen de curent electric (curent Röentgen).

Din relația (2.11) dacă se ține seama că $q_{p\Sigma} = \int_{V_\Sigma} \rho_{Vp}\,\mathrm{d}v$, unde ρ_V este distribuția de volume a sarcinii de polarizație, iar din $\int_{V\Sigma} \rho_{Vp}\,\mathrm{d}v = -\int_{\Sigma} \overline{P} \cdot \overline{\mathrm{d}A}$ rezultă că:

$$\rho_{Vp} = -\operatorname{div} \overline{P}, \tag{9.47}$$

atunci prin analogie cu densitatea curentului de transport $\overline{J}_T = \rho_V \cdot \bar{v}$, se obține densitatea curentului Röentgen de forma:

$$\overline{J}_R = \rho_{V_p} \cdot \bar{v} = -\bar{v} \operatorname{div} \overline{P}. \tag{9.48}$$

Considerînd toate formele de curenți înlănțuite de curba Γ, circulația intensității cîmpului magnetic pe curba Γ este:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = i_C + i_D + i_T + i_R = \int_{S_\Gamma} \left(\overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \rho_V - \bar{v} \operatorname{div} \overline{P} \right) \cdot \overline{\mathrm{d}A} \tag{9.49}$$

singura legătură între cele patru forme de curenți fiind dată de această relație, respectiv ei apar în expresia acestei legi (o parte dintre ei sînt legați și prin legea conservării sarcinii).

Membrul întîi din relația (9.49) reprezintă tensiunea magnetomotoare u_{mm_Γ}. Într-un membru avînd numai mărimi magnetice, iar în celălalt numai mărimi electrice înseamnă că legea face legătura dintre aspectul electric și cel magnetic al cîmpului electromagnetic. Nu pot exista linii de curent fără ca ele să fie înconjurate de linii de cîmp magnetic (cîmpul $\overline{H}$ face rotoare în jurul liniilor de curent), sensul lui $\overline{H}$ asociindu-se după regula burghiului drept cu sensurile acestor curenți.

Observație

În relația (9.45) curba Γ și toate suprafețele S_Γ sprijinite pe ea erau fixe în spațiu; s-a ținut seama de curenții de conducție și deplasare care înlănțuie curba Γ, precum și de corpurile încărcate cu sarcină și de cele polarizate ce trec cu viteza $\overline{v}$ prin suprafața S_Γ.

Dacă curba Γ este atașată corpurile în mișcare, atunci derivata de flux din membrul doi al relației (9.45) devine:

$$\frac{\mathrm{d}\psi_{S\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{S\Gamma} \overline{D}\cdot\overline{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int\limits_{S_\Gamma\,fix} \overline{D}\cdot\overline{\mathrm{d}A}\right]_{\overline{D}=\overline{D}(t)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int\limits_{S_\Gamma\,mobil} \overline{D}\cdot\overline{\mathrm{d}A}\right]_{\overline{D}\neq\overline{D}(t)} = \tag{9.50}$$

$$= \int\limits_{S_\Gamma} \frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\cdot\overline{\mathrm{d}A} + \int\limits_{S_\Gamma} [\overline{v}\ \mathrm{div}\ \overline{D}. + \mathrm{rot}\,(\overline{D}\times\overline{v})]\cdot\overline{\mathrm{d}A} = \int\limits_{S_\Gamma}\left[\frac{\partial\overline{D}}{\partial t} + \rho_V\,\overline{v} + \mathrm{rot}\,(\overline{D}\times\overline{v})\right]\overline{\mathrm{d}A}.$$

Introducînd în relația (9.45) și ținînd seama că:

$$\oint\limits_\Gamma \overline{H}\cdot\overline{\mathrm{d}s} = \int\limits_{S_\Gamma} \mathrm{rot}\ \overline{H}\cdot\overline{\mathrm{d}A}, \tag{9.51}$$

se obține:

$$\oint\limits_\Gamma \mathrm{rot}\ \overline{H}\cdot\overline{\mathrm{d}A} = \int\limits_{S_\Gamma}\left(\overline{J} + \frac{\partial\overline{D}}{\partial t} + \rho_V\overline{v} + \mathrm{rot}\,(\overline{D}+\overline{v})\right)\overline{\mathrm{d}A}. \tag{9.52}$$

În membrul doi al relației (9.52) apare suma tuturor curenților ce apar și în (9.49). Nepotrivirea dintre expresiile curenților Röentgen deduși teoretic și cei experimentali nu prezintă interes în tehnică.

Ținînd seama că în (9.52) suprafața S_Γ este arbitrară, se obține:

$$\mathrm{rot}\ \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial\overline{D}}{\partial t} + \rho_V\overline{v} + \mathrm{rot}\,(\overline{D}\times v) \tag{9.53}$$

care reprezintă *forma locală* a legii circuitului magnetic.

Dacă nu există corpuri mobile, deci S_Γ este fixă ($\overline{v}=0$), se obține:

$$\mathrm{rot}\ \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial\overline{D}}{\partial t} \tag{9.54}$$

care reprezintă prima ecuație a lui Maxwell.

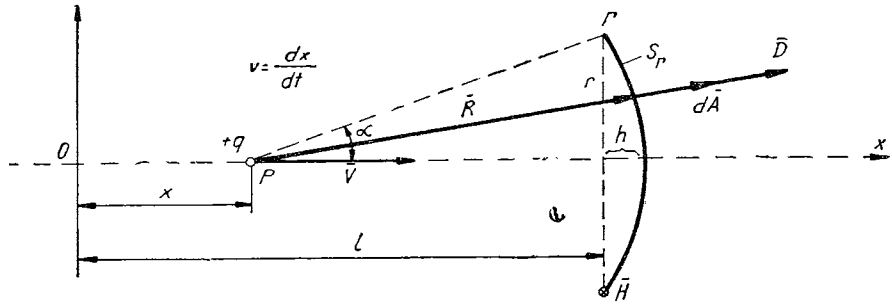


Fig. 9.15.

În regim staţionar cînd $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$, rămîne

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J}. \tag{9.54'}$$

Aplicaţie

Cîmpul magneéic al unei particule încărcate, în mişcare lentă. Comparaţie cu formula lui Biot—Savart—Laplace.

Se consideră sarcina $+q$, care se deplasează cu viteza $\bar{v}$, mult mai mică decît viteza luminii, ca în figura 9.15.

Din motive de simetrie, intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$ în lungul conturului circular Γ este constantă şi integrala pe acest contur se va scrie: $\oint_\Gamma \bar{H} \cdot \overline{ds} = 2\pi r \cdot H$ sau $\oint_\Gamma \bar{H} \cdot \overline{ds} = 2\pi RH \sin \alpha$, unde R este raza calotei sferice cu suprafaţa S, ce se sprijină pe conturul Γ şi are înălţimea $h = R(1 - \cos \alpha)$.

Din (9.45), deoarece nu avem curenţi de conducţie, rezultă:

$$\oint_\Gamma \bar{H} \cdot \overline{ds} = \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}, \tag{9.55}$$

unde ψ_{S_Γ} este fluxul vectorului $\bar{D}$ prin suprafaţa S_Γ a calotei, adică:

$$\psi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \bar{D} \cdot \overline{dA}. \tag{9.56}$$

Inducţia electrică (creată de sarcina punctiformă $+q$) este aceeaşi pe toată suprafaţa S_Γ şi este dată de relaţia:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} = \frac{q}{4\pi R^2} \cdot \bar{n}.$$

Relaţia (9.56) devine deci:

$$\psi_{S_\Gamma} = \frac{q}{4\pi R^2} \cdot \int_{S_\Gamma} dA = \frac{q}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R \cdot h = \frac{q}{2}(1 - \cos \alpha). \tag{9.57}$$

Relația (9.55) se va scrie în final sub forma

$$2\pi RH \sin\alpha = \frac{q}{2} \sin\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}, \tag{9.58}$$

de unde rezultă cîmpul magnetic

$$H = \frac{q}{4\pi R} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{9.59}$$

Din considerente geometrice se pot scrie relațiile:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{l-x}{r} \quad \text{sau} \quad -\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Ținînd cont că $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$ și $r = R\sin\alpha$, relația (9.59) se scrie:

$$H = \frac{q \cdot v \cdot \sin\alpha}{4\pi R^2} \quad \text{sau} \quad \bar{H} = \frac{q\bar{v} \times \bar{R}}{4\pi R^3}. \tag{9.60}$$

Aceasta este expresia cîmpului magnetic produs de o particulă în mișcare. Relația (9.60) este analoagă cu formula lui Biot—Savart—Laplace (8.15), dacă se înlocuiește $\mathrm{d}q \cdot \bar{v}$ cu $i \cdot \overline{\mathrm{d}s}$.

9.7. SUPRAFEȚE DE DISCONTINUITATE ÎN CÎMPUL MAGNETIC. REFRACȚIA LINIILOR DE CÎMP

Se consideră în figura 9.16 două medii cu permeabilitățile μ_1 și μ_2, separate printr-o suprafață S, avînd normalele $\bar{n}_{12} = -\bar{n}_{21}$. Vectorul inducției magnetice are în cele două medii volorile $\bar{B}_1$ și $\bar{B}_2$ și formează cu normala la suprafața de separație unghiurile α_1 și α_2.

Aplicînd legea fluxului magnetic (relația 9.24) pentru o suprafață Σ de forma unui cilindru foarte plat (se poate deci neglija fluxul prin suprafața sa laterală), avînd aria bazelor ΔA, se obține:

$$\oint_{\Sigma} \bar{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \bar{B}_1 \cdot \bar{n}_{21} \cdot \Delta A + \bar{B}_2 \cdot \bar{n}_{12} \cdot \Delta A = 0 \tag{9.61}$$

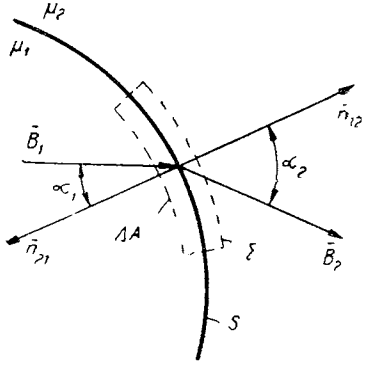


Fig. 9.16

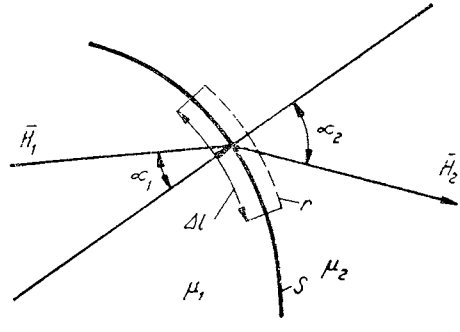


Fig. 9.17

sau:

$$B_1 \cdot \cos \alpha_1 - B_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0, \tag{9.62}$$

adică:

$$B_{1n} = B_{2n}. \tag{9.63}$$

Deci în cazul unei suprafețe de discontinuitate, componentele normale ale inducției magnetice se conservă.

Pentru același caz ca și în figura 9.16, se reprezintă în figura 9.17 vectorii $\bar{H}_1$ și $\bar{H}_2$, coliniari cu vectorii $\bar{B}_1$ respectiv $\bar{B}_2$, deoarece în medii izotrope se poate scrie:

$$\bar{B}_1 = \mu_1 \cdot \bar{H}_1 \quad \text{și} \quad \bar{B}_2 = \mu_2 \cdot \bar{H}_2. \tag{9.64}$$

Considerînd de această dată un contur închis Γ, foarte plat, legea circuitului magnetic este:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot \overline{\mathrm{ds}} = H_1 \sin \alpha_1 \cdot \Delta l - H_2 \sin \alpha_2 \cdot \Delta l = 0, \tag{9.65}$$

deoarece conturul Γ nu îmbrățișează curenți.

Relația (9.65) se mai poate scrie:

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2, \tag{9.66}$$

sau

$$H_{1t} = H_{2t}. \tag{9.67}$$

Adică, la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, componentele tangențiale ale cîmpului magnetic se conservă.

Din relațiile (9.62) și (9.64) se deduce:

$$\mu_1 H_1 \cos \alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos \alpha_2. \tag{9.68}$$

Împărțind (9.66) la (9.68) se obține:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\mu_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\mu_2}. \tag{9.69}$$

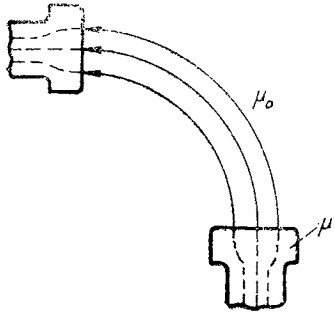


Fig. 9.18

Relația (9.69) reprezintă teorema refracțiilor liniilor de cîmp magnetic. La trecerea dintr-un mediu cu permeabilitate magnetică mai mare ($\mu_1 > \mu_2$), liniile de cîmp se apropie de normală ($\alpha_1 > \alpha_2$).

În cazul materialelor feromagnetice, conform teoremei refracției, liniile de cîmp ies în aer perpendicular pe suprafața de separație (fig. 9.18), deoarece $\mu \gg \mu_0$.

CAPITOLUL 10

INDUCȚIA ELECTROMAGNETICĂ

Fenomenul inducției electromagnetice stă la baza funcționării majorității mașinilor electrice generatoare. El a fost descoperit de către Faraday (1831) și constă în apariția unei tensiuni electromotoare într-un circuit în care există o variație în timp a fluxului magnetic. Experiențele prin care a fost pus în evidență fenomenul sînt date în figura 10.1 și figura 10.2. Un galvanometru G este legat la bornele unei bobine B_1. La introducerea bruscă a unui magnet permanent în interiorul bobinei, galvanometrul deviază într-un sens, iar la scoaterea sa din bobină galvanometrul deviază în sens contrar. De asemenea, la închiderea întreruptorului K galvanometrul deviază într-un sens, iar la deschidere în sens contrar.

10.1. LEGEA INDUCȚIEI ELECTROMAGNETICE

Sub formă integrală, legea inducției electromagnetice se scrie:

$$e_\Gamma = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}, \qquad (10.1)$$

sau:

$$\oint_\Gamma \overline{E} \cdot \overline{ds} = -\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \overline{B} \cdot \overline{dA} \qquad (10.2)$$

și se enunță astfel: *tensiunea electromotoare produsă prin inducție electromagne-*

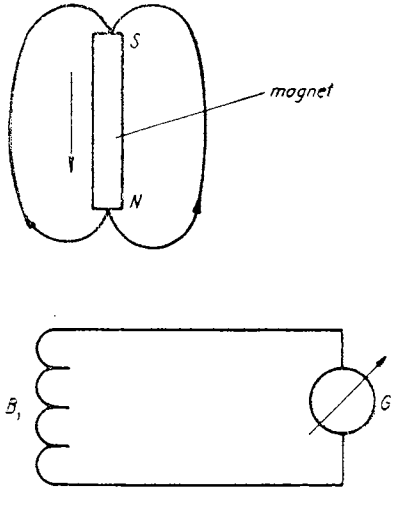


Fig. 10.1

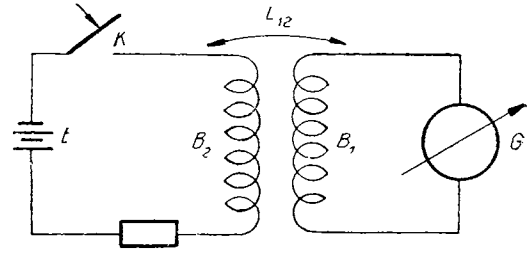


Fig. 10.2

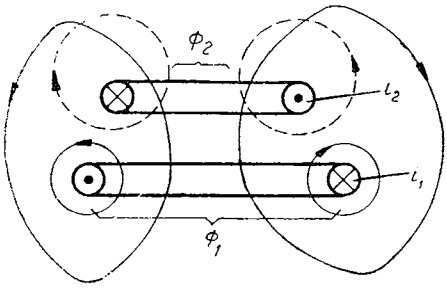


Fig. 10.3

tică în lungul unei curbe închise Γ *este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin suprafața sprijinită pe curba* Γ. Sensul tensiunii electromotoare este dat de regula lui Lenz și anume: ea este astfel încît efectele ei se opun cauzei care au produs-o. Sensul t.e.m. induse poate fi determinat printr-o experiență simplă cu două spire plane paralele (fig. 10.3). Spira *1* fiind parcursă de curentul i_1 și producînd un flux Φ_1, la apropierea bruscă a unei alte spire *2* de prima, în ea se induce o tensiune electromotoare care produce un curent, iar acest curent i_2 creează un flux Φ_2 de sens contrar fluxului Φ_1.

În cazul general, fluxul magnetic este produs de bobine care au N sprie. Se introduce noțiunea de flux total, dat de relația:

$$\psi = N \cdot \Phi, \tag{10.3}$$

iar tensiunea electromotoare indusă într-o bobină cu N spire va fi:

$$e = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}. \tag{10.4}$$

Trebuie observat că în regim staționar (în curent continuu), unde fluxul nu variază în timp, nu se induc tensiuni electromotoare, dacă conductoarele sînt fixe.

La aplicarea legii inducției electromagnetice (relația 10.2) trebuie să se țină seama de următoarele:

a) Curba închisă Γ este adesea luată în lungul unui conductor electric filiform; în cazul general, acest lucru nu este însă necesar și curba Γ poate avea orice formă, fiind dusă prin izolanți sau prin vid.

b) Dacă mediul considerat este în mișcare, curba Γ este atașată corpurilor în mișcarea lor.

c) Sensul de integrare pe curba Γ (sensul vectorului $\overline{\mathrm{d}s}$) se asociază cu sensul normalei la suprafața S_Γ (sensul vectorului $\overline{\mathrm{d}A}$) după regula burghiului drept.

Derivata de flux în raport cu timpul din membrul drept al relației (10.2) conține două componente:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} B \cdot \mathrm{d}A = -\int_{S_\Gamma}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\,\overline{\mathrm{d}A} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{S_\Gamma}\overline{B}\cdot\overline{\mathrm{d}A}\right]_{\overline{B}}. \tag{10.5}$$

Prima componentă este derivata fluxului în raport cu timpul, dacă suprafața S_Γ ar fi imobilă în raport cu sistemul de referință considerat și se numește tensiune electromotoare indusă prin transformare:

$$e_{tr} = -\int_{S_\Gamma}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\,\overline{\mathrm{d}A}. \tag{10.6}$$

A doua componentă este derivata fluxului, dacă vectorul $\bar{B}$ din diverse puncte, fixe în raport cu sistemul de referinţă considerat, nu ar depinde de timp (ar avea valorile sale din momentul t) şi numai suprafaţa S_Γ ar fi mobilă; această componentă se numeşte tensiune electromotoare indusă prin mişcare:

$$e_{miş} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{S_\Gamma} \bar{B}\cdot \overline{\mathrm{d}A}.\right]_{\bar{B}}. \qquad (10.7)$$

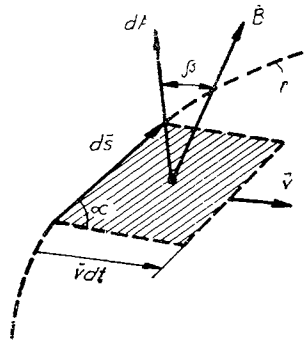


Fig. 10.4

Pentru explicitarea tensiunii electromotoare indusă prin mişcare se consideră (fig. 10.4) deplasarea cu viteza $\bar{v}$ a unui element $\overline{\mathrm{d}s}$ din conturul Γ. În timpul $\mathrm{d}t$ acest element de contur se deplasează cu distanţa $\bar{v}\ \mathrm{d}t$, descriind suprafaţa $\overline{\mathrm{d}A} = \bar{v} \times \overline{\mathrm{d}s}\cdot \mathrm{d}t$. Fluxul elementar prin această suprafaţă este

$$\mathrm{d}\Phi = \bar{B}\cdot \overline{\mathrm{d}A} = \bar{B}\cdot(\bar{v}\times\overline{\mathrm{d}s})\,\mathrm{d}t,$$

iar tensiunea electromotoare elementară este

$$\mathrm{d}e = -\bar{B}\cdot(\bar{v}\times\overline{\mathrm{d}s}) = (\bar{v}\times\bar{B})\cdot\overline{\mathrm{d}s}. \qquad (10.8)$$

Efectuînd integrala pentru întregul contur Γ se obţine expresia tensiunii electromotoare indusă prin mişcare:

$$e_{miş} = \oint_\Gamma (\bar{v}\times\bar{B})\cdot\overline{\mathrm{d}s}. \qquad (10.9)$$

Forma integrală dezvoltată a legii inducţiei electromagntice se obţine înlocuind componentele (10.6) şi (10.9) în (10.2):

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \bar{E}\cdot\overline{\mathrm{d}s} = -\int_{S_\Gamma}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\cdot\overline{\mathrm{d}A} + \oint_\Gamma(\bar{v}\times\bar{B})\cdot\overline{\mathrm{d}s}. \qquad (10.10)$$

Această separare a t.e.m. indusă (prin transformare sau prin mişcare) este relativă la sistemul faţă de care se exprimă viteza v. Global suma lor este însă independentă de sistemul de referinţă.

Aplicaţii

1. Demonstrarea formulei forţei electromagnetice (forţa lui Laplace)

Se consideră deplasarea unui element de conductor $\overline{\mathrm{d}s}$ cu viteza $\bar{v}$ în cîmpul magnetic de inducţie $\bar{B}$, în care se induce t.e.m de mişcare (10.8). În conturul închis Γ va apare un curent i. Puterea electrică corespunzătoare va fi:

$$\mathrm{d}P_e = i\cdot\mathrm{d}e = -\bar{B}(\bar{v}\times\overline{\mathrm{d}s})\cdot i = -\bar{v}(\overline{\mathrm{d}s}\times\bar{B})i. \qquad (10.11)$$

Puterea mecanică necesară deplasării elementului de conductor $\overline{\mathrm{d}s}$ cu viteza $\bar{v}$ este

$$-\mathrm{d}P_m = \overline{\mathrm{d}F}\cdot\bar{v}. \qquad (10.12)$$

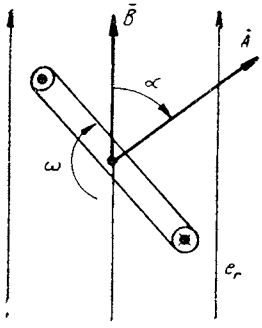


Fig. 10.5

Din principiul conservării energiei

$(dP_e = dP_m)$, rezultă:

$$\bar{v}\,(\overline{ds} \times \bar{B})\,i = \bar{v} \cdot \overline{dF}, \tag{10.13}$$

sau

$$\overline{dF} = i(\overline{ds} \times \bar{B}), \tag{10.14}$$

care este tocmai forța lui Laplace.

2. T.e.m. indusă într-o spiră plană ce se rotește într-un cîmp magnetic uniform

Spira (presupusă plană, avînd aria A) se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unui ax perpendicular pe liniile vectorului $\bar{B}$ (fig. 10.5). Inducția magnetică este constantă în timp.

Fluxul magnetic (dat de un cîmp uniform) prin suprafața spirei este

$$\Phi = \bar{B} \cdot \bar{A} = B \cdot A \cos \alpha. \tag{10.15}$$

T.e.m. indusă în conturul spirei (sensul de integrare pe conturul Γ este ataşat după regula burghiului drept cu vectorul arie $\bar{A}$) se obține sub forma:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot A \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}. \tag{10.16}$$

Între viteza de rotație ω şi unghiul α existînd relațiile:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}; \quad \alpha = \omega t + \alpha_0,$$

rezultă în final expresia:

$$e_\Gamma = \omega B \cdot A \cdot \sin(\omega t + \alpha_0) \tag{10.17}$$

a t.e.m. indusă în spiră. Sensul acesteia este indicat în figura 10.5.

10.2. EFECTUL HALL

Asupra unei sarcini electrice Δq care se deplasează cu viteza $\bar{v}$ (mult mai mică decît viteza luminii), într-un cîmp magnetic de inducție $\bar{B}$, se exercită o forță $\Delta\bar{F}$, calculabilă cu formula lui Lorentz:

$$\Delta\bar{F} = \Delta q \cdot \bar{v} \times \bar{B}. \tag{10.18}$$

Considerînd o plăcuță semiconductoare cu dimensiunile din figura 10.6 (se ia plăcuța din material semiconductor, deoarece în semiconductoare se manifestă cel mai puternic efectul Hall), situată într-un cîmp magnetic de inducție $\bar{B}$ şi fiind străbătută de un curent i, între fețele laterale se constată apariția unei tensiuni electromotoare e_H, numită *tensiune Hall*.

Utilizînd expresia forței lui Lorentz (10.18), rezultă că asupra unei sarcini în mişcare aflate într-un cîmp magnetic, acționează un cîmp neelectric (imprimat), dat de relația:

$$\bar{E}_i = \frac{\Delta\bar{F}}{\Delta q} = \bar{v} \times \bar{B} \tag{10.19}$$

(această valoare a cîmpului imprimat putea fi dedusă direct din 10.10).

Dacă se consideră sarcinile electrice din plăcuța semiconductoare ca fiind distribuite uniform cu densitatea de volume ρ_V, prin plăcuță va circula un curent de convecție a cărui densitate de curent este:

$$\bar{J}_v = \rho_V \cdot \bar{v}, \qquad (10.20)$$

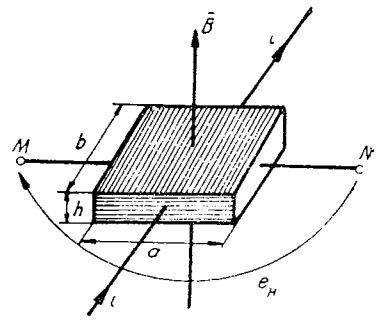


Fig. 10.6

și relația 10.19 devine:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{\rho_V} \cdot \bar{J}_v \times \bar{B}. \qquad (10.21)$$

Ținînd cont de faptul că vectorii $\bar{J}_V$ și $\bar{B}$ sînt perpendiculari și de relația $J_V = \frac{i}{ah}$, relația (10.21) se mai scrie:

$$E_i = \frac{i}{a \cdot h} \cdot \frac{1}{\rho_V} \cdot B. \qquad (10.22)$$

Tensiunea electromotoare Hall între punctele MN din figura 10.5 rezultă atunci:

$$e_H = a \cdot E_i = \frac{i \cdot B}{h\rho_V} = K_H \cdot i \cdot B, \qquad (10.23)$$

unde K_H este o constantă numită constantă Hall.

Forma locală a legii inducției electromagnetice. Aceasta se obține din forma integrală (10.2), în care se dezvoltă membrul drept al relației, astfel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S_\Gamma} \bar{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \int_{S_\Gamma} \left[\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \operatorname{div} \bar{B} + \operatorname{rot} (\bar{B} \times \bar{v}) \right] \overline{\mathrm{d}A}. \qquad (10.24)$$

Ținînd cont de legea fluxului magnetic sub formă locală

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \qquad (10.25)$$

legea inducției electromagnetice (10.2) capătă forma:

$$e_\Gamma = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot \overline{\mathrm{d}A} - \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot} (\bar{B} \times \bar{v}) \cdot \overline{\mathrm{d}A}. \qquad (10.26)$$

Integrala curbilinie (10.2) se mai poate scrie:

$$e = \oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = \int_{S_\Gamma} \mathrm{rot}\, \overline{E} \cdot \mathrm{d}\overline{A}. \tag{10.27}$$

Identificînd (10.27) cu (10.28), se obține:

$$\mathrm{rot}\, \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} - \mathrm{rot}\, (\overline{B} \times \overline{v}), \tag{10.28}$$

numită *forma locală* a legii inducției electromagnetice.

Pentru corpurile imobile ($\overline{v} = 0$), legea inducției electromagnetice sub forma locală devine:

$$\mathrm{rot}\, \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}, \tag{10.29}$$

formă care poartă numele de ecuația a doua a lui Maxwell.

CAPITOLUL 11

INDUCTIVITĂȚILE CIRCUITELOR ELECTRICE

Inductivitatea unui circuit electric se definește ca raportul dintre fluxul magnetic total care străbate o suprafață limitată de conturul unui circuit și curentul care produce acest flux (oricare alți curenți sînt considerați nuli).

Dacă în jurul circuitelor se află numai medii liniare (μ = const.), inductivitatea depinde numai de dimensiunile și forma circuitului și de permeabilitatea magnetică a mediului. În cazul materialelor feromagnetice (μ dependent de H), inductivitatea nu este constantă ci depinde de curent (deci de H).

11.1. INDUCTIVITĂȚI PROPRII ȘI MUTUALE

Legea circuitului magnetic în regim staționar, se poate scrie:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{ds} = \sum i, \tag{11.1}$$

iar fluxul magnetic al unei singure spire a unui circuit este:

$$\Phi = \int_{S_\Gamma} \mu \overline{H} \cdot \overline{dA}. \tag{11.2}$$

Dacă mediul magnetic în care se află circuitul este liniar (μ = const.), din relațiile (11.1) și (11.2) rezultă că între fluxul magnetic Φ (deci și între fluxul magnetic total $\psi = N \cdot \Phi$ și curentul din circuit) există o relație de proporționalitate:

$$\psi = L \cdot i, \tag{11.3}$$

sau:

$$L = \frac{\psi}{i}; \tag{11.4}$$

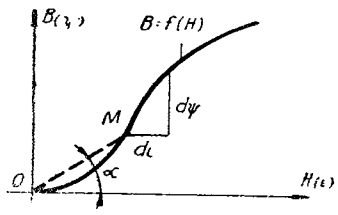


Fig. 11.1

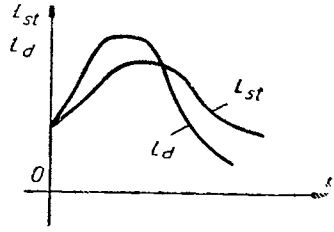


Fig. 11.2

această mărime (L) se numește inductivitatea circuitului. Pentru medii liniare, ea depinde de μ și de forma și dimensiunile circuitului. Pentru materialele magnetice cu caracteristica $B = f(H)$ neliniară ca în figura 11.1, se definește o inductivitate statică:

$$L_{st} = \frac{\psi}{i} = f_1(i) \tag{11.5}$$

și o inductivitate dinamică:

$$L_d = \frac{\Delta\psi}{\Delta i} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}i} = f_2(i). \tag{11.6}$$

Reprezentarea grafică a curbelor $L_{st} = f_1(i)$ și $L_d = f_2(i)$ este dată în figura 11.2; variațiile lor fiind analoage variațiilor $\mu_{st} = f(H)$ și $\mu_d = f(H)$ sînt date în figura 9.10.

Se consideră două circuite și se presupune că numai primul circuit este parcurs de curent ($i_1 \neq 0$ și $i_2 = 0$), ca în figura 11.3.

Notînd cu ψ_{11} fluxul total produs de circuitul 1 ce trece prin cele N_1 spire ale circuitului 1, și cu ψ_{12} fluxul total produs de circuitul 1, ce trece prin cele N_2 spire ale circuitului al doilea, se definește inductivitatea proprie a circuitului 1 prin relația:

$$L_{11} = \frac{\psi_{11}}{i_1} > 0 \tag{11.7}$$

și inductivitatea mutuală sau de cuplaj între circuitele 1 și 2, prin relația:

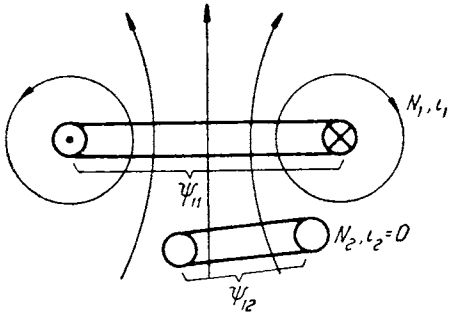


Fig. 11.3

$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_1} \gtrless 0. \tag{11.8}$$

În mod analog se definește inductivitatea proprie a circuitului 2:

$$L_{22} = \frac{\psi_{22}}{i_2} > 0 \tag{11.9}$$

și inductivitatea mutuală între circuitele 2 și 1:

$$L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_2} \gtrless 0. \tag{11.10}$$

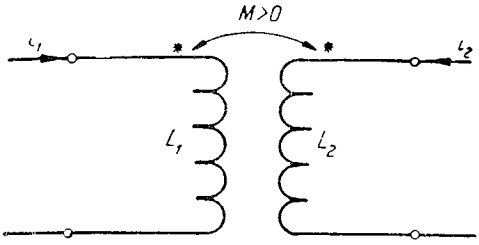


Fig. 11.4

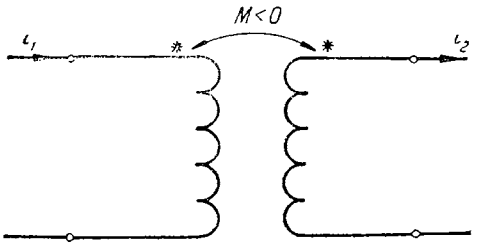


Fig. 11.5

Se poate arăta că inductivitățile mutuale satisfac condiția de reciprocitate:

$$L_{12} = L_{21} = M. \tag{11.11}$$

În practică se operează cu așa-numitul coeficient de cuplaj magnetic dintre două bobine:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}} \leqslant 1. \tag{11.12}$$

Bobinele necuplate magnetic au $M = 0$, deci $k = 0$, iar bobinele cuplate perfect au $M^2 = L_{11}L_{22}$, deci $k = 1$. În general $0 \leqslant k \leqslant 1$.

Spre deosebire de inductivitatea proprie care este totdeauna pozitivă, inductivitatea mutuală poate fi pozitivă, negativă sau nulă. Aceasta deoarece fluxul unei bobine prin cealaltă bobină poate avea același sens (bobinele sînt în concordanță din punct de vedere magnetic) sau poate avea sens contrar (bobinele sînt în opoziție din punct de vedere magnetic).

În mod obișnuit, nu se figurează explicit structura circuitului magnetic al bobinelor cuplate ci se adoptă convenția: orice indicare a valorii algebrice a unei inductivități mutuale L_{12} este însoțită de însemnarea cu un asterisc a uneia dintre bornele fiecărei bobine. Atunci cînd sensurile curenților prin cele două bobine cuplate magnetic sînt orientate în același mod față de bornele polarizate (marcate cu asterisc), inductivitatea mutuală corespunzătoare are valoarea pozitivă $M > 0$ (fig. 11.4); dacă sensurile curenților nu sînt orientate în același mod față de bornele polarizate, inductivitatea mutuală corespunzătoare acestor sensuri are valoarea negativă $M < 0$ (fig. 11.5).

Unitatea de măsură pentru inductivități în Sistemul Internațional este *henry* (H):

$$[L] = \frac{[\Psi]}{[i]} = \frac{1\ \text{Wb}}{1\ \text{A}} = 1\text{H}.$$

11.2. CALCULUL INDUCTIVITĂȚILOR

Există mai multe metode pentru calculul inductivităților.

11.2.1. Calculul inductivităților prin metoda directă

Cu această metodă se procedează în patru etape:

— se presupune circuitul (bobina) parcurs de curentul i;

— se calculează inducția magnetică $\overline{B}$ în diferite puncte din cîmp (cel mai des cu legea circuitului magnetic se calculează $\overline{H}$ apoi $\overline{B} = \mu\overline{H}$);

— se calculează fluxul $\Phi = \int \overline{B} \cdot \mathrm{d}\overline{A}$, apoi fluxul total $\psi = N \cdot \Phi$ (în cazul unei bobine cu N spire);

— se calculează inductivitatea $L = \frac{\psi}{i}$.

Exemplu

Calculul inductivității proprii a unei bobine toroidale, cu secțiunea patrată (fig. 11.6).

Din motive de simetrie, liniile de cîmp sînt circulare și aplicînd legea circuitului magnetic pe conturul Γ al unei linii de cîmp de rază r, se obține:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = N \cdot i. \tag{11.13}$$

Dar $\overline{H} \,||\, \overline{\mathrm{d}s}$ și datorită simetriei H este constant pe tot conturul și se poate scoate de sub integrală. Se obține:

$$H = \frac{Ni}{2\pi r}. \tag{11.14}$$

Inducția magnetică este:

$$B = \mu H = \frac{\mu N i}{2\pi r}. \tag{11.15}$$

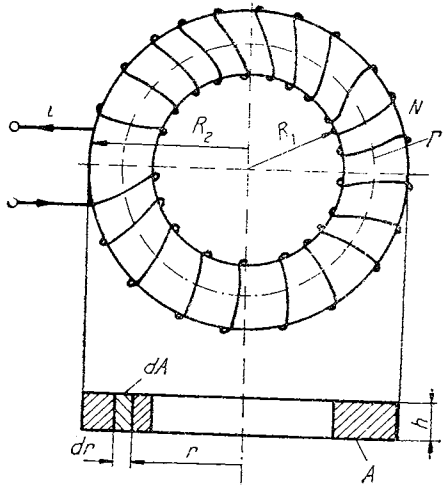


Fig. 11.6

Fluxul magnetic prin secțiunea A a torului este:

$$\Phi = \int_A \overline{B} \cdot \mathrm{d}\overline{A} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu N \cdot i}{2\pi r} \cdot h \cdot \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\mu N \cdot i \cdot h}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}, \tag{11.16}$$

iar fluxul total al bobinei este:

$$\psi = N\Phi = \frac{N^2 \cdot i \cdot h}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \cdot \mu. \tag{11.17}$$

Deci inductivitatea torului este:

$$L = \frac{\psi}{i} = \mu \frac{N^2 \cdot h}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{11.18}$$

11.2.2. Formula lui Neumann pentru calculul inductivităților mutuale a două circuite filiforme

Se consideră două circuite filiforme de contururi Γ_1 și Γ_2, ca în figura 11.7. Fluxul produs de circuitul 1, care străbate circuitul 2 este:

$$\Phi_{12} = \int_{S_{\Gamma_2}} \bar{B}_1 \cdot \overline{\mathrm{d}A}. \tag{11.19}$$

Utilizînd mărimea vectorială de calcul — potențialul magnetic vector

$$\bar{B}_1 = \mathrm{rot}\, \bar{A}_1, \tag{11.20}$$

se obține:

$$\Phi_{12} = \int_{S_{\Gamma_2}} \mathrm{rot}\, \bar{A}_1 \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \oint_{\Gamma_2} \bar{A}_1 \cdot \overline{\mathrm{d}s}_2. \tag{11.21}$$

În cazul circuitelor filiforme, potențialul magnetic vector datorit circuitului 1 este:

$$A_1 = \frac{\mu}{4\pi} i_1 \oint_{\Gamma_1} \frac{\overline{\mathrm{d}s_1}}{R_{12}}, \tag{11.22}$$

deci fluxul magnetic devine:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu}{4\pi} i_1 \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\overline{\mathrm{d}s_1}\,\overline{\mathrm{d}s_2}}{R_{12}},$$

unde R_{12} este distanța dintre cele două elemente de contur $\overline{\mathrm{d}s_1}$ și $\overline{\mathrm{d}s_2}$.

Inductivitatea mutuală între cele două circuite va fi deci:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\overline{\mathrm{d}s_1} \cdot \overline{\mathrm{d}s_2}}{R_{12}}. \tag{11.23}$$

Relația (11.23) reprezintă teorema lui Neumann referitoare la inductivitățile mutuale.

Pentru calculul inductivităților mutuale ale circuitelor compuse din diferite porțiuni, se introduce noțiunea convențională de inductivitate de calcul între porțiuni deschise de circuite. Relația (11.23) se poate pune sub forma:

$$L_{12} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} \frac{\mu}{4\pi} \int_{C1k} \int_{C2p} \frac{\overline{\mathrm{d}s_1} \cdot \overline{\mathrm{d}s_2}}{R_{12}}, \tag{11.24}$$

în care C_{1k} $(k = 1, 2, \ldots, m)$ sînt porțiuni deschise, care însumate compun conturul închis Γ_1, iar C_{2p} $(p = 1,2, \ldots, n)$

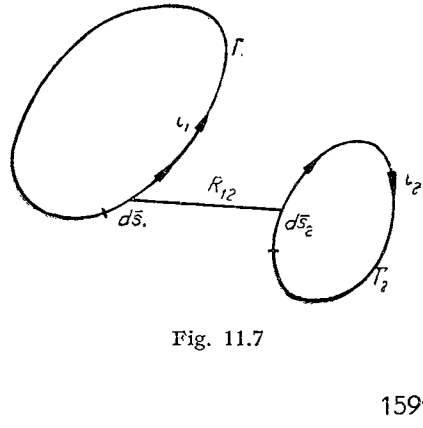


Fig. 11.7

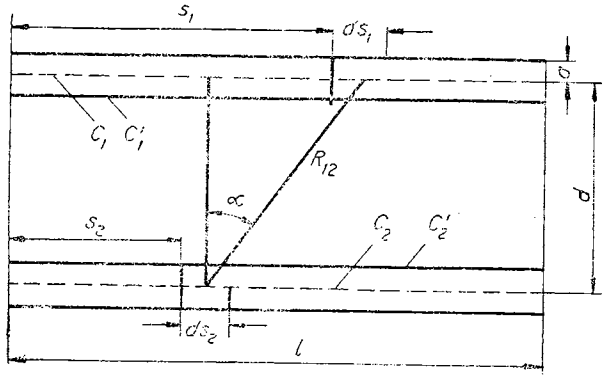


Fig. 11.8

sînt porțiuni deschise, care însumate compun conturul Γ_2. Deci în calcule interesează expresii de forma:]

$$L'_{kp} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_{1k}} \int_{C_{2p}} \frac{\overline{ds_1} \cdot \overline{ds_2}}{R_{12}}, \tag{11.25}$$

care se numesc inductivități mutuale de calcul între C_{1k} și C_{2p}.

Aplicînd relația (11.26) în cazul a două fire paralele în aer ($\mu \cong \mu_0$), din figura 11.8 se obține rezultatul:

$$L'_{21} = M'_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{2l}{d} - 1 \right), \tag{11.26}$$

relație valabilă pentru $d \gg a$.

Teorema lui Neumann se poate utiliza cu bună apropximație și pentru calculul inductivității proprii exterioare L_{ext} (care corespunde cîmpului magnetic din exteriorul conductorului) a unui circuit, dacă Γ_1 este axa conductorului circuitului, iar Γ_2 este o curbă marginală paralelă cu axa și conținută în suprafața exterioară a conductorului (fig. 11.9). Astfel se poate calcula o inductivitate proprie de calcul a unei porțiuni deschise a circuitului, definită de o relație analoagă relației (11.26), și anume:

$$L'_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C'_1} \frac{\overline{ds_1} \cdot \overline{ds_2}}{R_{12}}. \tag{11.27}$$

Relațiile (11.26) și (11.27) au semnificație fizică și se pot utiliza numai dacă sînt folosite prin însumare în relații de forma (11.25), pentru calculul unei inductivități propriu-zise, referitoare la circuite închise.

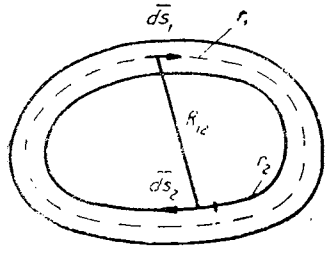


Fig. 11.9

Se poate observa că inductivitatea proprie de calcul L'_{11} a proțiunii din firul *1*, în cazul din figura 11.8, se poate obține din L'_{21} dat de relația (11.27), înlocuind $d = a (l \gg \gg d \gg a)$, deoarece dreptele de integrare

sînt acum C_1 și C_1' situate la distanța a, în loc să fie C_1 și C_2 situate la distanța d, adică:

$$L_{11}' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot l \cdot \left(\ln \frac{2l}{a} - 1\right). \tag{11.28}$$

Inductivitatea proprie a circuitului din figura 11.9, este dată de relația:

$$L_{11} = L_{ext} + L_{int}. \tag{11.29}$$

În cazul liniei aeriene bifilare (fig. 11.8), inductivitatea proprie exterioară se poate calcula cu o formă particulară a relației (11.25), și anume:

$$L_{ext} = L_{12} = L_{11}' - L_{12}' - L_{21}' + L_{22}' = 2(L_{11}' - L_{21}'). \tag{11.30}$$

Din relațiile (11.27), (11.28) și (11.30) rezultă:

$$L_{ext} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\ln \frac{2l}{a} - \ln \frac{2l}{d}\right) = \frac{\mu_0 l}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{a}. \tag{11.31}$$

În paragraful 13.2 vom calcula inductivitatea corespunzătoare cîmpului magnetic din interiorul unui conductor masiv avînd permeabilitatea μ:

$$L_{int} = \frac{\mu l}{8\pi}. \tag{11.32}$$

În cazul liniei cu două conductoare paralele identice, se obține:

$$L_{int} = \frac{\mu l}{4\pi} = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} l. \tag{11.33}$$

Din relațiile (11.29), (11.31) și (11.33) rezultă pentru linia aeriană bifilară (fig. 11.8):

$$L_{11} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\frac{\mu_r}{2} + 2 \ln \frac{d}{a}\right). \tag{11.34}$$

Alte metode de calcul ale inductivităților vor fi prezentate în par. 12.4 și par. 13.2.

11.3. EXPRIMAREA T.E.M. INDUSE CU AJUTORUL INDUCTIVITĂȚILOR

Se presupune că în figura 11.3 circuitele sînt nedeformabile și imobile (aceasta înseamnă că inductivitățile proprii L_{11}, L_{22} și cea mutuală L_{12} sînt constante). Dacă cele două circuite sînt parcurse de curenții i_1 și i_2 variabili în timp, scriind expresiile fluxurilor prin cele două bobine:

$$\psi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2\,; \quad \psi_2 = L_{22} i_2 + L_{21} i_1, \tag{11.35}$$

se obțin conform legii inducției electromagnetice t.e.m. induse în bobine:

$$e_1 = -\frac{d\psi_1}{dt} = -L_{11}\frac{di_1}{dt} - L_{12}\frac{di_2}{dt} \tag{11.36}$$

$$e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} = -L_{22}\frac{di_2}{dt} - L_{21}\frac{di_1}{dt}$$

Termenii $\left(-L_{11}\frac{di_1}{dt}\right)$ și $\left(-L_{22}\frac{di_2}{dt}\right)$ se numesc *t.e.m. autoinduse,* iar termenii $\left(-L_{12}\frac{di_2}{dt}\right)$ și $\left(-L_{21}\frac{di_1}{dt}\right)$ se numesc *t.e.m. de inducție mutuală.*

Dacă un circuit nu este rigid, atunci t.e.m. se scrie:

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L \cdot i) = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}, \tag{11.37}$$

unde termenul $\left(-i\frac{dL}{dt}\right)$ se numește *t.e.m. indusă prin mișcare.*

CAPITOLUL 12

CIRCUITE MAGNETICE

Un circuit magnetic este format din: miez sau coloană, care este partea înfăşurată de bobină; jug, care este partea neînfăşurată, eventual, armătură, dacă este mobilă; polii circuitului magnetic, care sînt feţele ce mărginesc întrefierul (polul se numeşte nord dacă prin faţa respectivă ies liniile de cîmp din corpul feromagnetic, şi sud dacă în faţa respectivă intră liniile de cîmp).

Liniile lui $\bar{B}$ se închid în majoritatea lor prin fier şi prin întrefier. Cele care nu se închid prin fier şi întrefier (porţiunile utile ale circuitului magnetic) se numesc linii de dispersie sau de scăpări.

Calculul circuitelor magnetice se face cu ajutorul legii circuitului magnetic şi al legii fluxului magnetic. Calculul constă în determinarea solenaţiei necesare pentru a se stabili un anumit flux, sau invers. Calculul aproximativ se face neglijînd dispersia magnetică şi considerînd fluxul uniform repartizat într-o secţiune transversală, apoi se aplică legea circuitului magnetic unei linii care se închide prin fier şi prin întrefier.

12.1. LEGEA LUI OHM PENTRU CIRCUITE MAGNETICE

Se consideră bobina toroidală din figura 12.1. Aplicînd legea circuitului magnetic pentru curba închisă Γ, se obţine:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = Ni, \tag{12.1}$$

în care $\overline{\mathrm{d}s}$ este elementul de lungime al conturului Γ.

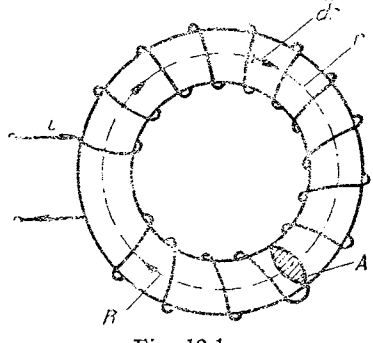


Fig. 12.1

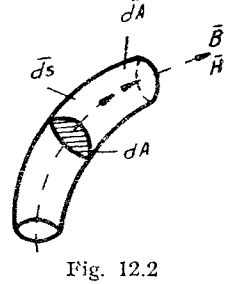


Fig. 12.2

Se separă un tub de flux (fig. 12.2), pentru care fluxul elementar are expresia:

$$d\Phi = \overline{B} \cdot \overline{dA} = \mu \overline{H} \cdot \overline{dA}, \tag{12.2}$$

deci:

$$H = \frac{d\Phi}{\mu dA}. \tag{12.3}$$

Înlocuind (12.3) în (12.1) se obține:

$$\oint_{\Gamma} \frac{d\Phi}{\mu dA} \cdot ds = N \cdot i. \tag{12.4}$$

Deoarece $\overline{ds} \parallel \overline{dA}$ și $d\Phi$ este constant în lungul tubului de flux, relația (12.4) devine:

$$d\Phi \oint_{\Gamma} \frac{ds}{\mu \cdot dA} = N \cdot i, \tag{12.5}$$

apoi, pentru întreaga secțiune A, rezultă:

$$\Phi \oint_{\Gamma} \frac{ds}{\mu \cdot A} = N \cdot i. \tag{12.6}$$

Mărimea definită de relația,

$$\oint_{\Gamma} \frac{ds}{\mu A} = R_m, \tag{12.7}$$

se numește *reluctanță* sau *rezistență magnetică* a circuitului *magnetic*. Pentru o porțiune deschisă de circuit magnetic, reluctanța este definită prin relația:

$$R_{m12} = \int_{1}^{2} \frac{ds}{\mu A}. \tag{12.8}$$

În cazul particular al unei porțiuni de circuit omogen (μ este constant), avînd secțiunea constantă A și o lungime l, reluctanța este:

$$R_m = \frac{l}{\mu A}. \tag{12.9}$$

Inversul reluctanței se numește permeanță și se notează:

$$\lambda = \frac{1}{R_m} = \mu \frac{A}{l}. \tag{12.10}$$

Din relațiile (12.6) și (12.7) rezultă:

$$\Phi \cdot R_m = \theta, \tag{12.11}$$

în care $\theta = N \cdot i = \oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{ds} = U_{mm}$ este solenația, egală cu tensiunea magnetomotoare a circuitului magnetic.

Rezultă:

$$U_{mm} = \Phi \cdot R_m, \qquad (12.12)$$

relaţie care se numeşte *legea lui Ohm pentru un circuit magnetic închis.*

În cazul unor porţiuni deschise de circuit magnetic se difineşte tensiunea magnetică prin relaţia:

$$U_m = \int_1^2 \bar{H} \cdot \bar{ds} = \Phi \int_1^2 \frac{ds}{\mu \cdot A}, \qquad (12.13)$$

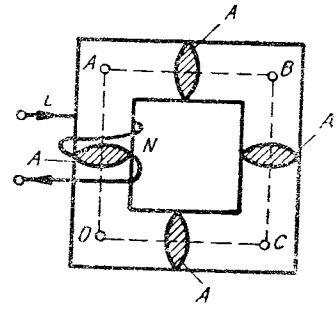


Fig. 12.3

care cu (12.8) se scrie:

$$U_m = R_{m12} \cdot \Phi, \qquad (12.14)$$

relaţie care se numeşte *legea lui Ohm pentru o porţiune de circuit magnetic.*

Exemplu

Să se calculeze fluxul magnetic în circuitul din figura 12.3. Din (12.11) rezultă:

$$\Phi = \frac{N \cdot i}{R_m}, \qquad (12.15)$$

în care reluctanţa circuitului magnetic este dată de (12.9):

$$R_m = \frac{l}{\mu A}, \qquad (12.16)$$

unde: $l = l_{AB} + l_{BC} + l_{CD} + l_{DA}$.

Deci, se obţine:

$$\Phi = \frac{N \cdot i \cdot \mu \cdot A}{l_{AB} + l_{BC} + l_{CD} + l_{DA}}. \qquad (12.17)$$

Unitatea de măsură a reluctanţei în Sistemul Internaţional este amper pe weber 1 A/Wb) sau henry la puterea minus unu (H^{-1}).

$$[R_m] = \frac{[U_{mm}]}{[\Phi]} = 1\,\frac{A}{Wb} = H^{-1}.$$

12.2. TEOREMELE LUI KICHHOFF PENTRU CIRCUITELE MAGNETICE

12.2.1. Prima teoremă

Din legea fluxului magnetic:

$$\Phi_\Sigma = \oint_\Sigma \bar{B} \cdot \bar{dA} = 0, \qquad (12.18)$$

rezultă că fluxul magnetic prin orice suprafaţă închisă Σ este nul (fig. 12.4)

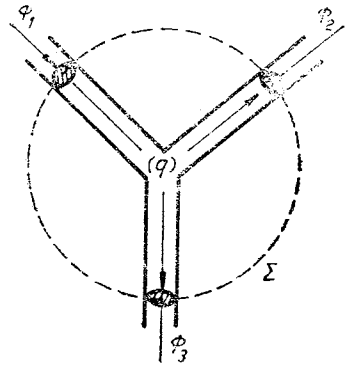


Fig. 12.4.

Aplicînd această lege unui nod q (punctul de ramificație a circuitului magnetic) se obține:

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0, \qquad (12.19)$$

unde s-au considerat pozitive fluxurile îndreptate după normala exterioară suprafeței Σ (adică fluxurile care ies din nod) și negative cele care intră în nod.

Restrîns, prima teoremă a lui Kirchhoff referitoare la circuite magnetice (relația 12.19) se scrie:

$$\sum_{k \in q} \Phi_k = 0, \qquad (12.20)$$

și se enunță astfel: *suma algebrică a fluxurilor magnetice, care trec prin laturile unui circuit magnetic ce concură într-un nod al acestui circuit, este nulă (se consideră pozitive fluxurile ce ies din nod și negative cele care intră în nod).*

12.2.2. A doua teoremă

Se consideră ochiul (p) (fig. 12.5) al unui circuit magnetic și se alege un sens de parcurgere pe acest ochi, adică sensul în care se face integrala de linie a vectorului $\overline{H}$. Se notează cu R_{m1}, R_{m2}, ..., reluctanțele laturilor ochiului, cu Φ_1, Φ_2, ..., fluxurile magnetice care trec prin aceste porțiuni de circuit.

Solenațiile și fluxurile magnetice ale laturilor se presupun definite în sensul de referință ales pe ochi. În caz contrar, solenația sau fluxul intră cu semnul minus în ecuația care se obține.

Din legea circuitului magnetic

$$U_{mm} = \oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = \theta_{s_\Gamma} = \sum_{(p)} \theta_k, \qquad (12.12)$$

prin descompunerea integralei pe porțiuni, și legea lui Ohm (12.14), rezultă:

$$U_{mm} = \sum_{(p)} U_{mk} = \sum_{(p)} R_{mk}\Phi_k. \qquad (12.22)$$

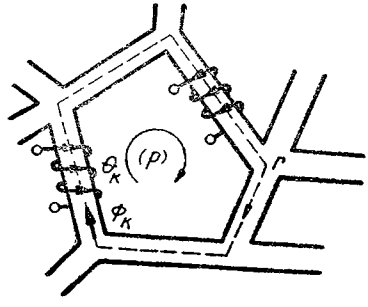


Fig. 12.5.

Din relațiile (12.21) și (12.22) rezultă (pentru fiecare ochi (p) al circuitului) teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$\sum_{(p)} \theta_k = \sum_{(p)} R_{mk}\Phi_k, \qquad (12.23)$$

analoagă celei din electrocinetică și care se enunță: *în regim staționar sau cvasistaționar, suma algebrică a solenațiilor care înlănțuie laturile fără dispersie magnetică*

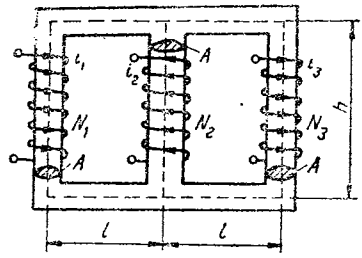


Fig. 12.6

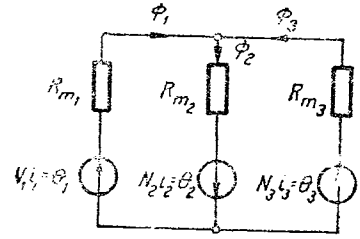


Fig. 12.7

este egală cu suma algebrică a produselor reluctanțelor magnetice ale laturilor prin fluxurile magnetice care trec prin ele (adică cu suma căderilor de tensiune magnetică).

Cînd anumite laturi prezintă dispersie, se poate considera fluxul magnetic de dispersie ca fiind fluxul unei noi laturi, legată în derivație, între punctele extreme ale liniilor de inducție ale fluxului de dispersie.

Exemplu

Se dă circuitul magnetic cu forma și dimensiunile din figura 12.6. Să se scrie teoremele lui Kirchhoff corespunzătoare acestui circuit magnetic.

Pentru simplitatea calculului, se desenează schema electrică echivalentă a acestui circuit magnetic (fig. 12.7). Solenațiile θ_1, θ_2, θ_3 au sensul dat de regula burghiului drept, iar sensu fluxurilor se alege în mod arbitrar.

Prima teoremă a lui Kirchhoff se scrie :

$$\Phi_1 + \Phi_3 = \Phi_2, \tag{12.24}$$

iar teorema a doua aplicată celor două ochiuri conduce la :

$$R_{m1}\Phi_1 + R_{m2}\ \Phi_2 = \theta_1 + \theta_2 \tag{12.25}$$

$$R_{m2} \cdot \Phi_2 + R_{m3} \cdot \Phi_3 = \theta_2 + \theta_3, \tag{12.26}$$

unde reluctanțele magnetice se calculează cu relațiile :

$$R_{m1} = R_{m3} = \frac{2l + h}{\mu \cdot A}, \tag{12.27}$$

$$R_{m2} = \frac{h}{\mu \cdot A}, \tag{12.28}$$

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$, fiind permeabilitatea absolută a materialului feromagnetic. Dacă se dau valori numerice, se pot calcula mai întîi reluctanțele cu (12.27) și (12.28), apoi din sistemul (12.24)—(12.26) se determină fluxurile magnetice.

Reluctanța echivalentă a unei porțiuni de circuit magnetic, fără solenații pe laturi, este egală cu raportul dintre tensiunea magnetică aplicată între cele două extremități de circuit și fluxul magnetic care intră într-o extremitate și iese prin cealaltă:

$$R_{me} = \frac{U_m}{\Phi}. \tag{12.29}$$

12.3.1. Circuitul magnetic cu laturile legate în serie

Aplicînd a doua teoremă a lui Kirchhoff circuitului magnetic din figura 12.8, care are laturile legate în serie (fluxul magnetic este constant), rezultă:

$$U_m = \sum_{k=1}^{n} U_{mk} = \sum_{k=1}^{n} R_{mk}\Phi = \Phi \sum_{k=1}^{n} R_{mk}. \tag{12.30}$$

apoi din (12.29) se deduce reluctanța echivalentă:

$$R_{me} = \sum_{k=1}^{n} R_{mk}, \tag{12.31}$$

adică reluctanța echivalentă unei grupări serie de reluctanțe este egală cu suma reluctanțelor (aceeași relație ca și în cazul rezistențelor electrice).

12.3.2. Circuitul magnetic cu laturile legate în paralel

Aplicînd teorema întîi a lui Kirchhoff circuitului magnetic din figura 12.9, care are laturile legate în paralel (tensiunea magnetică este aceeași la bornele tuturor laturilor), rezultă:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_m}{R_{mk}} = U_m \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_{mk}}. \tag{12.32}$$

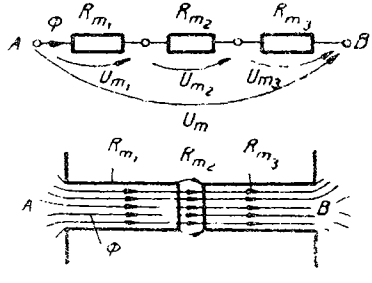


Fig. 12.8

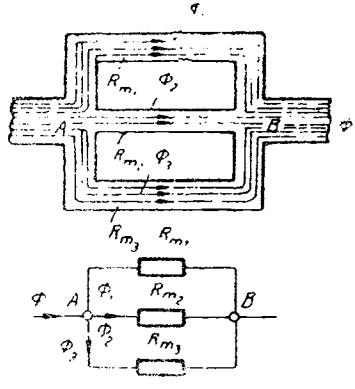


Fig. 12.9

Din (12.29) și (12.32) rezultă:

$$\frac{1}{R_{me}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_{mk}}, \tag{12.33}$$

relație analoagă celei de la gruparea în paralel a rezistențelor electrice.

Utilizînd permeanțele, relația (12.33) se scrie:

$$\lambda_e = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k, \tag{12.34}$$

adică permeanța echivalentă unei grupări în paralel a mai multor permeanțe este egală cu suma permeanțelor.

12.4. RELAȚIA ÎNTRE INDUCTIVITATE ȘI RELUCTANȚĂ

Se consideră spre exemplu bobina toroidală din figura 12.1, fără dispersie, avînd reluctanța R_m. Inductivitatea proprie a bobinei toroidale este:

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{N \cdot \Phi}{i}. \tag{12.35}$$

Din relația (12.11), reluctanța este:

$$R_m = \frac{\theta}{\Phi} = \frac{N \cdot i}{\Phi}, \tag{12.36}$$

Făcînd produsul relațiilor (12.35) și (12.36) rezultă:

$$L \cdot R_m = N^2, \tag{12.37}$$

adică produsul dintre inductivitatea proprie și reluctanța magnetică echivalentă a unui circuit magnetic este constant și egal cu pătratul numărului de spire al bobinei.

Relația (12.37) permite calculul inductivității circuitelor magnetice în funcție de reluctanță:

$$L = \frac{N^2}{R_m}. \tag{12.38}$$

12.5. CIRCUITE MAGNETICE NELINIARE

Așa cum s-a arătat, legea lui Ohm și teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice sînt analoage cu legea lui Ohm și teoremele lui Kirchhoff pentru circuite electrice.

În consecință, un circuit magnetic neliniar se rezolvă prin analogie cu un circuit electric neliniar. Metodele prezentate în par. 7.4 se pot extinde deci și pentru circuite neliniare. Se ține cont de următoarele mărimi analoage : curentul electric I este analog cu fluxul magnetic $\Phi = B \cdot A$; tensiunea electrică U este analoagă cu tensiunea magnetică $U_m = H \cdot l$; tensiunea electromotoare E este analoagă cu solenația $0 = N \cdot i$ și rezistența electrică R este analoagă cu rezistența magnetică R_m. Caracteristica neliniară a materialului magnetic este dată de obicei sub forma $B = f_1(H)$, dar aceasta se poate ușor transforma în caracteristică de forma $\Phi = f_2(U_m)$ (analoagă cu caracteristica rezistoarelor neliniare $I = f(U)$), dacă se ține cont de relațiile $\Phi = B \cdot A$ și $U_m = H \cdot l$.

CAPITOLUL 13

ENERGIA ȘI FORȚELE CÎMPULUI MAGNETIC

13.1. ENERGIA CÎMPULUI MAGNETIC

Se consideră un sistem de circuite, parcurse de curenții electrici i_1, i_2, ..., i_n și legate la sursele de tensiune electromotoare e_1, e_2, ..., e_n (fig. 13.1). Circuitele pot fi mobile, iar tensiunile electromotoare pot fi variabile în timp. De la timpul t la timpul $t + \mathrm{d}t$, energia totală cedată de surse este $\sum_{k=1}^{n} e_k i_k \mathrm{d}t$, și ea trebuie să acopere:

a) energia disipată în conductoarele circuitelor datorită efectului Joule—Lenz:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k i_k^2 \mathrm{d}t\,; \tag{13.1}$$

b) lucrul mecanic elementar efectuat de forțele magnetice generalizate X, la variația coordonatei generalizate x:

$$\delta L = X \cdot \mathrm{d}x\,; \tag{13.2}$$

c) variația energiei magnetice $\mathrm{d}W_m$, localizată în cîmpul magnetic al celor n circuite.

Bilanțul energetic al sistemului de n circuite, în timpul elementar $\mathrm{d}t$ este dat de egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} e_k i_k \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} r_k i_k^2 \mathrm{d}t + \delta L + \mathrm{d}W_m. \tag{13.3}$$

În afară de tensiunile electromotoare ale surselor, în circuite se induc tensiuni electromotoare date de legea inducției electromagnetice:

$$e_{ki} = -\frac{\mathrm{d}\psi_k}{\mathrm{d}t}. \tag{13.4}$$

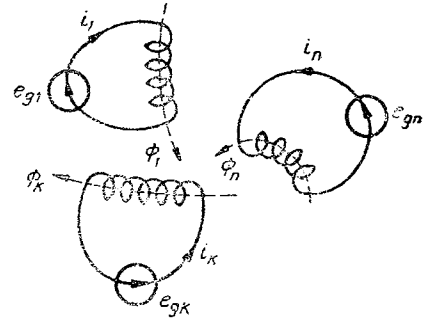


Fig. 13.1

Legea lui Ohm aplicată fiecărui circuit în parte se scrie:

$$e_k + e_{ki} = r_k i_k, \tag{13.5}$$

sau:

$$e_k = r_k i_k + \frac{\mathrm{d}\psi_k}{\mathrm{d}t}. \tag{13.6}$$

Înlocuind relațiile (13.2) și (13.6) în (13.3) se obține:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(r_k i_k^2 + i_k \frac{\mathrm{d}\psi_k}{\mathrm{d}t} \right) \cdot \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} r_k i_k^2 \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_m + X \cdot \mathrm{d}x,$$

sau:

$$\mathrm{d}W_m = \sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\psi_k - X \cdot \mathrm{d}x. \tag{13.7}$$

Această relație exprimă variația energiei magnetice, cînd variază fluxurile magnetice și se deplasează circuitele în cîmpul magnetic. Ea permite calculul energiei magnetice W_m precum și determinarea forței generalizate X.

Pentru calculul energiei magnetice, se consideră un mediu liniar (μ independent de H) și se consideră circuitele imobile în cîmp ($\mathrm{d}x = 0$). În acest caz variația energiei sistemului se datorește numai variației fluxurilor magnetice, adică (13.7) se scrie:

$$\mathrm{d}W_m = \sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\psi_k, \tag{13.8}$$

unde:

$$\psi_k = L_{kk} i_k + \sum_{j \neq k}^{n} L_{jk} i_j = \sum_{j=1}^{n} L_{jk} i_j. \tag{13.9}$$

Diferențiind (13.9) se obține:

$$\mathrm{d}\psi_k = \sum_{j=1}^{n} L_{jk} \mathrm{d}i_j, \tag{13.10}$$

care introdusă în (13.8) conduce la relația:

$$\mathrm{d}W_m = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{jk} i_k \mathrm{d}i_j. \tag{13.11}$$

sau, prin integrare:

$$W_m = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{L_{jk} i_k i_j}{2}. \tag{13.12}$$

Utilizînd (13.9), energia magnetică mai poate fi pusă și sub forma:

$$W_m = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_k \cdot i_k}{2}. \tag{13.13}$$

Exemplu

Să se calculeze energia magnetică a două bobine, cuplate ca în figura 13.2.

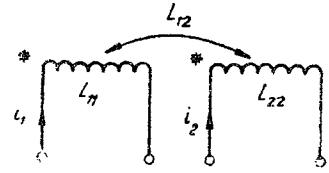


Fig. 13.2

Conform relației (13.12) se obține expresia:

$$W_m = \frac{1}{2}(L_{11}i_1^2 + L_{22}i_1i_2 + L_{21}i_2i_1 + L_{22}i_2^2), \tag{13.14}$$

dar cum $L_{12} = L_{21}$, rezultă:

$$W_m = \frac{1}{2}(L_{11}i_1^2 + L_{22}i_2^2) + L_{12}i_1i_2, \tag{13.15}$$

în care:

$W_{m1} = \frac{L_{11}i_1^2}{2}$ reprezintă energia magnetică proprie a bobinei 1;

$W_{m2} = \frac{L_{22}i_2^2}{2}$ — energia magnetică proprie a celei de a doua bobine;

$W_{m12} = L_{12}i_1i_2$ — energia de interacțiune între cele două bobine cuplate.

Ultima din energii se mai poate pune și sub forma:

$$W_{m12} = i_1\psi_{21} = i_2\psi_{12} = i_1i_2L_{21}. \tag{13.16}$$

13.2. DENSITATEA DE VOLUM A ENERGIEI MAGNETICE

Energia magnetică a unei singure bobine este:

$$W_m = \frac{\psi \cdot i}{2} = \frac{L \cdot i^2}{2} = \frac{\psi^2}{2L}. \tag{13.17}$$

Considerînd bobina toroidală din figura 12.1, pentru care se presupune un cîmp magnetic omogen în interior (aria A fiind destul de mică) și notînd cu l lungimea medie a unei linii de cîmp magnetic, din legea circuitului magnetic, se obține:

$$i = \frac{H \cdot l}{N}, \tag{13.18}$$

fluxul total al bobinei fiind:

$$\psi = N \cdot \Phi = N \cdot B \cdot A. \tag{13.19}$$

Din (13.17), (13.18) și (13.19) se obține energia magnetică a bobinei considerate:

$$W_m = \frac{\psi \cdot i}{2} = \frac{N \cdot B \cdot A}{2} \cdot \frac{H \cdot l}{N} = \frac{B \cdot H}{2} \cdot V, \tag{13.20}$$

unde V este volumul torului în care există cîmp magnetic.

Rezultă densitatea de volum a energiei magnetice, dată de expresia:

$$W'_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} B \cdot H. \tag{13.21}$$

Expresia densității de volum a energiei magnetice a fost obținută într-un caz particular. În cazul general, densitatea de volum a energiei magnetice este dată de relația:

$$W'_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2}\,\bar{B}\cdot\bar{H}, \tag{13.22}$$

de unde:

$$W_m = \int_V \frac{\bar{B}\cdot\bar{H}}{2}\cdot dV. \tag{13.23}$$

Relația (13.21) se mai poate pune și sub formele:

$$W'_m = \frac{1}{2}\,B\cdot H = \frac{1}{2}\,\mu H^2 = \frac{1}{2}\,\frac{B^2}{\mu}, \tag{13.24}$$

din care rezultă că pentru B = const., energia magnetică are densitatea cu atît mai mare cu cît μ este mai mic. De exemplu, în cazul circuitului magnetic cu întrefier din figura 13.3, densitatea energiei magnetice în întrefier, $W'_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$, este mult mai mare decît densitatea energiei magnetice din miez, $W'_{mFe} = \frac{B^2}{2\mu}$, deoarece permeabilitatea magnetică a miezului de fier este mult mai mare decît permeabilitatea magnetică a întrefierului μ_0; în același timp inducția magnetică în miez este egală cu inducția magnetică în întrefier (aceasta rezultă din legea fluxului magnetic aplicată suprafeței Σ din figură).

Exemplu

Calculul energiei magnetice din interiorul unui conductor drept, de lungime l și de rază $a \ll l$, parcurs de curentul i (fig. 13.4). Se presupune curentul uniform repartizat pe întreaga secțiune a conductorului cu densitatea de curent

$$J = \frac{i}{\pi a^2}. \tag{13.25}$$

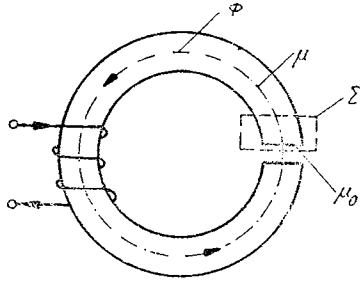


Fig. 13.3

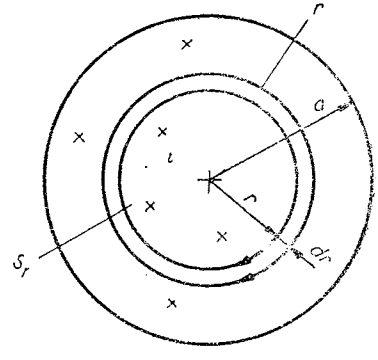


Fig. 13.4

Curentul îmbrățișat de conturul Γ va fi:

$$i_\Gamma = J \cdot \pi r^2 = i \frac{r^2}{a^2}. \tag{13.26}$$

Aplicînd legea circuitului magnetic

$$\oint \bar{H} \cdot \mathrm{d}\bar{s} = i \frac{r^2}{a^2}, \tag{13.27}$$

rezultă:

$$H = \frac{i \cdot r}{2\pi a^2}. \tag{13.28}$$

Densitatea de volum a energiei magnetice (13.24) este:

$$W'_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{\mu \cdot i^2 \cdot r^2}{8\pi^2 \cdot a^4}. \tag{13.29}$$

Considerînd un element de volum:

$$\mathrm{d}V = l \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r, \tag{13.30}$$

rezultă energia magnetică înmagazinată în cîmpul magnetic al conductorului, numită energie magnetică interioară:

$$W_{m\,int} = \int_0^a \frac{\mu \cdot i^2 \cdot r^2}{8\pi^2 \cdot a^4} \cdot 2\pi r \cdot l \cdot \mathrm{d}r = \frac{\mu \cdot i^2 \cdot l}{16\pi}. \tag{13.31}$$

Din această energie se poate obține valoarea inductivității corespunzătoare cîmpului magnetic interior, numită inductivitate interioară. Pentru aceasta utilizăm relația (13.17):

$$L_{int} = \frac{2W_{m\,int}}{i^2} = \frac{\mu l}{8\pi}, \tag{13.32}$$

relație care a fost utilizată în paragraful 11.2.2.

13.3. FORȚE MAGNETICE

Lucrul mecanic elementar, care se efectuează la o deplasare $\mathrm{d}x$ a unui corp în cîmpul magnetic, sub acțiunea forței generalizate X, se poate calcula din relația (13.7):

$$X \cdot \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\psi_k - \mathrm{d}W_m. \tag{13.33}$$

Dacă se mențin fluxurile constante ($\mathrm{d}\psi_k = 0$), rezultă:

$$X \cdot \mathrm{d}x = -(\mathrm{d}W_m)_{\psi_k = \text{const.}} \tag{13.34}$$

deci:

$$X = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\psi_k = \text{const.}}, \tag{13.35}$$

relație care reprezintă prima teoremă a forțelor generalizate în cîmpul magnetic și se enunță astfel: *forța generalizată X, corespunzătoare coordonatei generalizate x, este egală cu derivata parțială a energiei magnetice în raport cu coordonata generalizată, luată cu semn schimbat, la fluxuri magnetice constante prin circuite.* Dacă în circuite se presupun constanți curenții, relația (13.33) se mai poate pune sub forma:

$$X \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}\left[\sum_{k=1}^{n} i_k \cdot \psi_k\right] - \mathrm{d}W_m. \tag{13.36}$$

Tot în cazul curenților constanți, suma din membrul al doilea al relației (13.36) este egală, conform relației (13.13) cu $2W_m$, astfel încît, relația (13.36) se va scrie:

$$X \cdot \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}W_m - \mathrm{d}W_m = \mathrm{d}W_m \text{ (pentru } i_k = \text{const.)} \tag{13.37}$$

Din aceasta se deduce forța generalizată:

$$X = +\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{i_k = \text{const.}}, \tag{13.38}$$

relație care reprezintă a doua teoremă a forțelor generalizate în cîmpul magnetic și se enunță astfel: *forța generalizată X, corespunzătoare coordonatei generalizate x, este egală cu derivata parțială a energiei magnetice (exprimată în funcție de curenți și de coordonata generalizată), în raport cu coordonata generalizată corespunzătoare, la curenți constanți în circuite.*

Exemplu

Calculul forței portante a unui electromagnet (fig. 13.5).

Conform relației (13.24), densitatea de energie în întrefier (care este mult mai mare decît densitatea de energie în miez) este:

$$W'_{m0} = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0}, \tag{13.39}$$

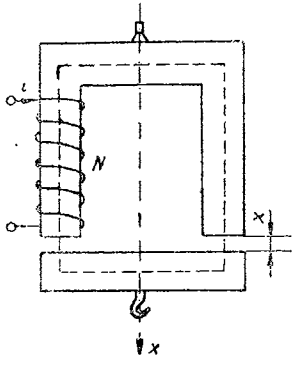


Fig. 13.5

iar energia magnetică înmagazinată în volumul celor două întrefieruri este:

$$W_{m0} = W'_{m0} \cdot V = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot 2Ax = \frac{B^2 \cdot A \cdot x}{\mu_0}. \tag{13.40}$$

Utilizînd relația (13.35), rezultă expresia forței portante:

$$X = -\left(\frac{\partial W_{m0}}{\partial x}\right)_{\psi = \text{const.}} = -\frac{B^2 \cdot A}{\mu_0}. \tag{13.41}$$

Semnul minus arată că forța portantă este îndreptată în sensul descreșterii distanței x, adică este o forță de atracție a armăturii.

CAPITOLUL 14

ELEMENTE DE CIRCUIT ÎN REGIM CVASISTAȚIONAR

14.1. REGIMURI DE FUNCȚIONARE ALE CIRCUITELOR ELECTRICE

Din punct de vedere al teoriei macroscopice, se disting următoarele regimuri de desfășurare ale fenomenelor electromagnetice:

a) Regimul static, caracterizat prin aceea că mărimile nu variază în timp și nu se produc transformări energetice în sistemul considerat. În această situație, fenomenele electrice se produc independent de cele magnetice și cele două aspecte ale cîmpului electromagnetic (cîmp electric și cîmp magnetic) pot fi studiate separat.

b) Regimul staționar, caracterizat prin aceea că mărimile nu variază în timp, însă se produc transformări de energie în sistem, datorită deplasării ordonate a sarcinilor electrice.

c) Regimul cvasistaționar, caracterizat prin aceea că variația în timp a mărimilor este suficient de lentă, pentru a se putea neglija radiația cîmpului electromagnetic.

d) Regimul nestaționar sau variabil, care corespunde celui mai general caz de variație a mărimilor.

Curentul continuu (regimul staționar) într-un circuit poate fi de durată numai sub forma unui curent de conducție sau de convecție. Curentul variabil (regimului nestaționar) poate exista și în dielectric sub forma curentului de deplasare.

Regimul cvasistaționar este un caz particular al regimului variabil, pentru care se neglijează curentul de deplasare din jurul conductoarelor care formează un circuit electric, în afară de dielectricul condensatoarelor. În acest caz, condensatoarele sînt elemente ale circuitului electric.

Regimul cvasistaționar este practic realizat dacă cea mai mare dimensiune liniară l a întregului circuit este foarte mică față de cea mai mică lungime de undă „λ" (corespunzătoare celei mai înalte frecvențe f) care intervine în studiu, adică:

$$l \ll \lambda = \frac{c_0}{f}, \tag{14.1}$$

unde $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s este viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid.

Circuitele electrice se consideră filiforme, dacă secțiunea transversală a conductoarelor este suficient de mică, pentru ca densitatea de curent să fie aceeași în orice punct al secțiunii. Dacă se notează cu a una din dimensiunile liniare ale secțiunii transversale a conductorului (de exemplu raza secțiunii unui conductor circular), se poate considera conductorul filiform dacă

$$a \ll \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \cdot \mu \cdot \omega}}, \tag{14.2}$$

unde δ se numește adîncime de pătrundere (vezi cap. 27), σ este conductivitatea materialului, μ — permeabilitatea lui magnetică, iar $\omega = 2\pi f$ — pulsația curentului electric.

Se remarcă dependența de frecvență a relațiilor (14.1) și (14.2) care definesc condițiile de regim cvasistaționar al circuitelor filiforme.

Există un domeniu (la frecvențe joase), pentru care sînt îndeplinite ambele condiții, adică circuitele pot fi considerate filiforme și funcționînd în regim cvasistaționar. Există un alt domeniu (la frecvențe medii) pentru care este îndeplinită numai condiția 14.1, adică circuitele nu mai pot fi considerate filiforme, însă regimul rămîne cvasistaționar. La frecvențe ridicate, ambele condiții nu mai sînt îndeplinite, iar circuitele nu mai sînt filiforme și nici regimul nu mai este cvasistaționar.

14.2. RELAȚII FUNDAMENTALE PENTRU STUDIUL CIRCUITELOR

În studiul circuitelor electrice în regim cvasistaționar se folosesc fie legile generale și de material ale teoriei macroscopice ale cîmpului electromagnetic, fie forme particulare sau consecințe ale acestora, exprimate sub formă integrală cu ajutorul mărimilor de stare ale cîmpului electromagnetic.

Cele mai importante dintre acestea sînt:

a. Legea inducției electromagnetice. Tensiunea electromotoare indusă în lungul unui contur închis Γ este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafață S_Γ care se sprijină pe acest contur:

$$\oint_\Gamma \bar{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{S\Gamma}}{\mathrm{d}t}. \tag{14.3}$$

b. Legea conducției electrice (legea lui Ohm). Suma dintre tensiunea electrică în lungul unui fir conductor și tensiunea electromotoare a cîmpului imprimat în lungul firului este proporțională cu curentul de conducție din fir:

$$\int_C (\bar{E} + \bar{E}_i)\, \overline{\mathrm{d}s} = u_f + e_i = R \cdot i. \tag{14.4}$$

În această relație, intensitatea curentului electric este $i = \int_S \bar{J} \cdot \overline{\mathrm{d}A}$, unde S este secțiunea transversală a conductorului, iar R este rezistența electrică a porțiunii de conductor considerată.

Integrala (14.4) se efectuează pe un drum care coincide cu axul conductorului și deci $\overline{\mathrm{d}s} \,||\, \overline{\mathrm{d}A}$.

c. Teorema continuității curentului electric de conducție. În regim cvasistaționar, intensitatea totală a curentului electric de conducție printr-o suprafață închisă Σ care nu străbate dielectricul vreunui condensator este nulă:

$$\oint_{\Sigma} \bar{J} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = i_{\Sigma} = 0. \tag{14.5}$$

d. Legea conservării sarcinii electrice. Intensitatea i a curentului electric de conducție care intră în suprafața închisă Σ, ce conține armătura unui condensator electric, este egală cu viteza de creștere a sarcinii q de pe această armătură:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{14.6}$$

În acest caz, curentul de deplasare, $i_D = \frac{\mathrm{d}\psi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i$, nu mai poate fi neglijat, el fiind egal cu curentul electric de conducție ce alimentează condensatorul.

e. Teorema capacității electrostatice. Raportul dintre sarcina q a armăturii unui condensator și tensiunea u_c, dintre armături, este o mărime constantă, numită capacitate electrostatică, independentă de sarcină sau de tensiune (pentru dielectrici liniari) și determinată de configurația geometrică a condensatorului și de natura dielectricului:

$$C = \frac{q}{u_c} > 0. \tag{14.7}$$

f. Teorema inductivității. Raportul dintre fluxul magnetic ψ_{jk} (produs de curentul circuitului k și care străbate circuitul j) și curentul i_k, care îl produce, este o mărime constantă, numită inductivitate, independentă de mărimea fluxului sau a curentului (pentru medii magnetice liniare) și determinată de configurația geometrică a circuitelor și de natura mediului înconjurător:

$$L_{jk} = \frac{\psi_{jk}}{i_k} = L_{kj}. \tag{14.8}$$

Această relație definește inductivitatea proprie (coeficientul de autoinducție) dacă $j = k$ și inductivitatea mutuală dacă $j \neq k$.

În cazul a n circuite filiforme, situate într-un mediu magnetic liniar, fluxul rezultant produs de toate circuitele prin conturul circuitului k este egal cu suma fluxurilor produse de fiecare circuit în parte:

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{n} \psi_{kj} = \sum_{j=1}^{n} L_{kj} \cdot i_j. \tag{14.9}$$

g. Teorema energiei electrice. Energia acumulată în cîmpul electric al unui condensator electric cu dielectric liniar este:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot q \cdot u_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_c^2. \tag{14.10}$$

h. Teorema energiei magnetice. Energia acumulată în cîmpul magnetic al unui sistem de n circuite situate într-un mediu magnetic liniar este:

$$W_m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \psi_k \cdot i_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} L_{kj} \cdot i_k \cdot i_j. \tag{14.11}$$

Termenii cu indici dubli reprezintă energia magnetică proprie:

$$W_{m(k)} = \frac{1}{2} L_{kk} \cdot i_k^2 = \frac{1}{2} \psi_{kk} \cdot i_k = \frac{1}{2} \frac{\psi_{kk}^2}{L_k}, \tag{14.12}$$

iar perechile de termeni cu indici diferiţi reprezintă energia magnetică de interacţiune (de cuplaj) a circuitelor k şi j:

$$W_{m(kj)} = \frac{L_{kj} \cdot i_k \cdot ij + L_{jk} \cdot ij \cdot i_k}{2} = L_{kj} \cdot i_k \cdot i_j = \psi_{kj} \cdot i_k = \psi_{kj} \cdot i_j. \tag{14.13}$$

i. Legea transformării energiei în conductoare (legea lui Joule-Lenz). Puterea disipată sub formă de căldură într-un conductor de rezistenţă R, străbătut de curentul i, este:

$$p_R = R \cdot i^2 > 0. \tag{14.14}$$

j. Teorema transferului de putere pe la borne. Puterea p_b primită instantaneu pe la borne de o reţea cu N borne de acces, ale cărei laturi nu sînt cuplate magnetic cu exteriorul, este egală cu suma produselor dintre potenţialele instantanee v_c ale bornelor şi curenţii instantanei $i_c^{(ex)}$ absorbiţi din exterior:

$$p_b = \sum_{c=1}^{N} v_c \cdot i_c^{(ex)}. \tag{14.15}$$

În particular, în cazul unei reţele cu două borne de acces, prin care intră curenţii $i_1^{(ex)} = +i$ şi $i_2^{(ex)} = -i$, puterea primită pe la borne este:

$$p_b = v_1 \cdot i - v_2 \cdot i = (v_1 - v_2) \cdot i = u_b \cdot i. \tag{14.15'}$$

14.3. ELEMENTE DE CIRCUIT

În orice circuit electric, trecerea curentului electric este însoţită de degajare de căldură prin efect Joule—Lenz şi de producerea unor cîmpuri electrice şi magnetice.

Constructiv, marea majoritate a instalaţiilor electrice sînt astfel realizate, încît în regim cvasistaţionar, în diverse porţiuni de circuit predomină numai cîte unul din cele trei fenomene electromagnetice. Astfel, pe un rezistor de rezistenţă R se degajă căldură, între armăturile unui condensator de capacitate C apare cîmp electric, iar o bobină de inductivitate L produce cîmp magnetic.

Desigur, elementele reale de circuit (rezistoarele, condensatoarele, bobinele etc) nu pot fi caracterizate numai printr-un singur parametru (R, C respectiv L). Înfăşurarea unei bobine, de exemplu, prezintă nu numai o inductivitate L, ci şi o anumită rezistenţă. De asemenea, între diferitele spire ale bobinei există o capacitate electrică.

Prin abstractizare, în teoria circuitelor se consideră că elementele de circuit au parametrii R, C și L concentrați în diverse puncte ale circuitului. Circuitele pentru care parametrii R, C și L apar în puncte distincte se numesc circuite cu *parametri concentrați* (sau cu constante concentrate). Cîmpul magnetic este luat în considerare numai prin inductivitățile bobinelor din laturi, iar cîmpul electric prin capacitățile condensatoarelor din aceste laturi.

Admițînd ipoteza circuitelor cu constante concentrate se poate constitui teoria circuitelor electrice în regim cvasistaționar, care cuprinde o clasă imensă de circuite reale utilizate în practică. În același timp, este important să ne dăm seama de limitele de valabilitate ale unei asemenea abstractizări. Criteriul calitativ de admitere a unui asemenea considerent poate fi stabilit numai după studiul cîmpului electromagnetic variabil.

14.3.1. Rezistorul ideal

Rezistorul ideal este un element de circuit caracterizat prin rezistența R, avînd inductivitatea neglijabilă. Fie un contur închis Γ, care trece în lungul firului conductor și se închide pe la borne în sens contrar tensiunii de la borne u_b (fig. 14.1, *a*).

Aplicînd legea inducției electromagnetice (relația 14.3), tensiunea electromotoare indusă în lungul acestui contur este zero, deoarece rezistorul ideal are inductivitatea neglijabilă și deci și fluxul magnetic este neglijabil. Această tensiune electromotoare este egală cu suma algebrică dintre tensiunea în lungul firului u_f și tensiunea la borne u_b: $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = e_\Gamma = u_f - u_b = 0$.

Pentru rezistorul ideal, tensiunea la borne este egală cu tensiunea în lungul firului dată de legea lui Ohm (relația 14.4, cu $e_i = 0$): $u_b = u_f = R \cdot i$.

În circuite complexe, căderea de tensiune la bornele unui rezistor ideal se notează u_R. Se obține astfel expresia căderii de tensiune rezistive:

$$u_R = R \cdot i. \tag{14.16}$$

În regim variabil tensiunea la bornele unui rezistor ideal rămîne proporțională cu intensitatea curentului, adică legea lui Ohm din curent continuu își păstrează forma uzuală. Rezistorul ideal este singurul element de circuit cu această proprietate.

Înmulțind ambii membri ai relației (14.16) cu i, se obține bilanțul puterilor instantanee:

$$p = u_R \cdot i = R \cdot i^2 > 0. \tag{14.17}$$

Puterea instantanee primită pe la bornele unui rezistor ideal este disipată în conductor prin efect Joule—Lenz.

Simbolurile grafice ale unui rezistor ideal sînt indicate în figura 14.1, *b*.

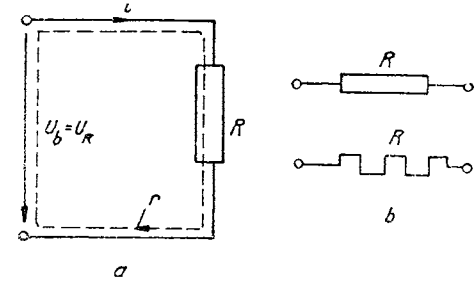


Fig. 14.1

14.3.2. Bobina ideală

Bobina ideală este caracterizată prin inductivitatea L, avînd rezistența neglijabilă. Tensiunea electromotoare e_Γ, calculată în lungul conturului închis (fig. 14.2, *a*), este dată de relația (14.3):

$$\oint_\Gamma \bar{E} \cdot \bar{ds} = e_\Gamma = u_f - u_b = -\frac{d\psi}{dt}, \tag{14.18}$$

unde $\psi = \Phi_{S\Gamma}$ este fluxul magnetic al bobinei, calculat printr-o suprafață S_Γ sprijinită pe conturul Γ.

Practic, cîmpul magnetic fiind intens numai în interiorul bobinei, fluxul $\Phi_{S\Gamma}$ este determinat în principal de porțiunile suprafeței S_Γ sprijinită pe spire și mai puțin de fluxul prin suprafața sprijinită pe conductoarele de legătură.

Dacă rezistența bobinei este neglijabilă, căderea de tensiune în lungul firului ($u_f = R \cdot i$) se poate neglija, și relația (14.18) devine:

$$u_b = -e_\Gamma = \frac{d\psi}{dt}. \tag{14.19}$$

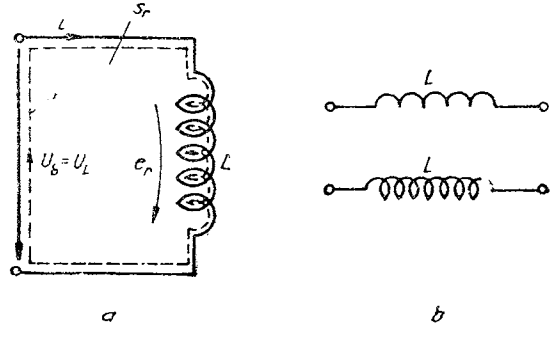
Cînd bobina nu este cuplată magnetic cu alte bobine (se neglijează inductivitățile ei mutuale), din relația (14.9) rezultă $u_b = -e_\Gamma = \frac{d}{dt}(L \cdot i)$, iar pentru circuite liniare (inductivitatea L este constantă) simbolul L se scoate de sub semnul de derivare. În circuite complexe se notează căderea de tensiune la bornele bobinei ideale prin u_L. Se obține expresia căderii de tensiune inductive sub forma:

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = L\frac{di}{dt}. \tag{14.20}$$

Ultima egalitate din relația (14.20) este valabilă numai pentru bobine necuplate magnetic cu altele și a căror inductivitate este constantă.

Înmulțind ambii membrii ai relației (14.20) cu i, rezultă bilanțul puterilor instantanee:

$$p = u_L \cdot i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L \cdot i^2\right) \gtrless 0 \tag{14.21}$$



a *b*

Fig. 14.2

Puterea instantanee primită pe la borne de o bobină ideală este egală cu viteza de variație a energiei magnetice (14.12) a bobinei. Această putere poate fi pozitivă (sursa cedează energie bobinei) sau negativă (sursa primește energie de la bobină) după cum, în momentul considerat, sensurile lui u_L și i coincid sau nu. În figura 14.2, *b* se indică simbolurile grafice ale bobinei ideale.

14.3.3. Condensatorul ideal

Condensatorul ideal este caracterizat prin capacitatea C, avînd rezistența conductoarelor de legătură neglijabilă, inductivitatea circuitului format de conductoarele de legătură și armături de asemenea neglijabilă. Se consideră dielectricul perfect, adică prin dielectric nu poate exista curent de conducție.

Fie $+q$ sarcina armăturii prin care intră curentul i, în sensul de referință ales. Se consideră curba închisă Γ (fig. 14.3, *a*) care străbate dielectricul condensatorului în sensul tensiunii u_c și se închide pe la borne în sens contrar tensiunii u_b. Conform legii inducției electromagnetice (relația 14.3) rezultă: $\oint \bar{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = e_\Gamma = u_f + u_c - u_b = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$.

Deoarece inductivitatea circuitului precum și rezistența firelor de legătură sînt neglijabile $\left(-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ și } u_f = R \cdot i = 0\right)$, rezultă că tensiunea la bornele unui condensator ideal este egală cu tensiunea dintre armături, dată de relația (14.7):

$$u_b = u_c = \frac{q}{C}. \tag{14.22}$$

Din relațiile (14.6) și (14.22) rezultă:

$$i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C \cdot u_c) = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}, \tag{14.23}$$

ultima egalitate fiind valabilă numai pentru condensatoare cu capacitate constantă (dielectricul liniar și configurația geometrică invariabilă în timp).

Integrînd relația (14.23), se obține:

$$u_c = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t. \tag{14.24}$$

Aceasta reprezintă căderea de tensiune capacitivă, subînțelegîndu-se o constantă arbitrară la integrala nedefinită.

Înmulțind ambii membrii ai relației (14.23) cu $u_c = u_b$, se ob-

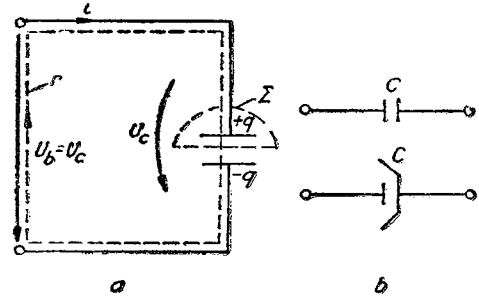


Fig. 14.3

ține bilanțul puterilor instantanee la condensatorul cu capacitatea invariabilă:

$$p = u_c \cdot i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} C \cdot u_c^2\right) \gtrless 0. \tag{14.25}$$

Puterea instantanee primită de un condensator ideal pe la borne este egală cu viteza de variație a energiei electrice (14.10) a condensatorului. Această putere poate fi pozitivă (sursa cedează energie condensatorului) sau negativă (sursa primește energie de la condensator) după cum, în momentul considerat sensurile lui u_c și i coincid sau nu. În figura 14.3, *b* sînt indicate simbolurile grafice ale unui condensator ideal.

14.3.4. Generatorul ideal de tensiune

O sursă de energie electromagnetică, care se bucură de proprietatea că la bornele sale produce o tensiune electromotoare e_g independentă de structura rețelei în care este conectată și care are rezistența interioară neglijabilă, se numește generator ideal de tensiune.

Dacă se consideră o curbă închisă Γ (fig. 14.4, *a*), care trece prin generator în sensul tensiunii electromotoare e_g și se închide între bornele *11'* în sensul tensiunii la borne u_b, luată după regula de la generatoare, se poate scrie:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma (\bar{E} + \bar{E}_i)\, \overline{\mathrm{d}s} = e_g.$$

Efectuînd integrala pe porțiuni, și ținînd cont de faptul că rezistența circuitului între bornele *11'* prin sursă este neglijabilă, rezultă:

$$e_g = u_b \tag{14.26}$$

Dacă sensul tensiunii la borne u_b se ia după regula de la receptoare (fig. 14.4, *b*), se obține relația:

$$e_g = -u_b. \tag{14.26'}$$

Generatoarele de tensiune reale posedă o rezistență și o inductivitate interioară și în acest caz ele admit o schemă echivalentă alcătuită dintr-un generator ideal de tensiune, în serie cu un rezistor și o bobină.

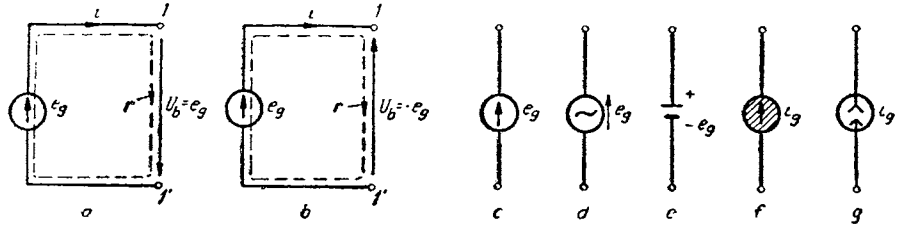


Fig. 14.4

În figura 14.4, *c* se indică simbolul grafic utilizat pentru generatoarele ideale de tensiune. Se mai utilizează și simbolurile din figura 14.4, *d* (pentru generatoare de curent alternativ) și figura 14.4, *e* (pentru generatoare de curent continuu).

14.3.5. Generatorul ideal de curent

O sursă de energie electromagnetică care se bucură de proprietatea că debitează un curent dat i_g, independent de rețeaua la care este conectată, se numește generator ideal de curent.

Simbolurile utilizate pentru generatorul ideal de curent sînt indicate în figura 14.4, *f* și *g*.

CAPITOLUL 15

MĂRIMILE, PARAMETRII ŞI TEOREMELE CIRCUITELOR LINIARE DE CURENT ALTERNATIV

15.1. DEFINIŢII. VALORI CARACTERISTICE

15.1.1. Mărimi variabile

În sensul cel mai larg, mărimile variabile pot fi tensiuni electromotoare, căderi de tensiune sau curenţi care îşi modifică valoarea în timp.

Convenim să numim *valoarea instantanee*, valoarea pe care o are mărimea variabilă la un moment oarecare t. Prin convenţie, valoarea instantanee se notează cu literă mică, astfel:

$$e = e(t)\,;\quad u = u(t)\,;\quad i = i(t)\ \text{etc.}$$

Mărimea periodică este o mărime variabilă a cărei succesiune de valori se repetă la intervale egale de timp. Cel mai scurt interval de timp după care mărimea periodică îşi reia valoarea în aceeaşi ordine se numeşte perioadă (T).

Pentru mărimile periodice există relaţiile:

$$\begin{aligned} e(t) &= e(t + kT) \\ u(t) &= u(t + kT) \\ i(t) &= i(t + kT), \end{aligned} \tag{15.1}$$

unde k este un număr întreg oarecare.

Numărul de perioade cuprinse în unitatea de timp se numeşte *frecvenţă* (f), iar produsul $2\pi f = \omega$ se numeşte *pulsaţia* mărimii periodice. Există deci relaţiile:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\,;\quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\,;\quad \omega T = 2\pi. \tag{15.2}$$

Frecvenţa se măsoară în *hertz* (Hz). Gama frecvenţelor utilizate în tehnică este foarte mare, cuprinsă între zeci şi miliarde de hertz. Curentul continuu poate fi considerat un caz particular al unui curent variabil, cu frecvenţa zero. În instalaţiile energetice se folosesc frecvenţe joase, standar-

dizate la valoarea de 50 Hz în Europa şi valoarea de 60 Hz în America. În telefonie se folosesc frecvenţe de ordinul sutelor sau miilor de Hz, iar în radiotehnică ele pot ajunge pînă la ordinul miliardelor de Hz.

Se numeşte *valoare de vîrf* a unei mărimi periodice, cea mai mare valoare instantanee (ca modul) pe care o poate avea acea mărime în decursul unei perioade. Ea se notează, de exemplu în cazul unui curent $i(t)$, prin simbolul $\hat{i}$.

Valoarea medie a unei mărimi variabile se calculează cu integrala:

$$I_{med} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i \cdot \mathrm{d}t. \tag{15.3}$$

În cazul mărimilor periodice, intervalul de timp se consideră o perioadă ($t_2 - t_1 = T$), iar valoarea medie se notează cu simbolul I_0 sau $\tilde{i}$ şi ea este:

$$\tilde{i} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i \cdot \mathrm{d}t. \tag{15.4}$$

Valoarea efectivă (sau eficace) a unei mărimi periodice se calculează cu relaţia:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i^2 \cdot \mathrm{d}t} > 0. \tag{15.5}$$

Valoarea efectivă a unui curent periodic (simbolizată prin I sau I_{ef}) este numeric egală cu intensitatea unui curent continuu, care străbătînd aceeaşi rezistenţă ca şi curentul periodic, produce aceeaşi cantitate de căldură în timp de o perioadă.

În figura 15.1 este prezentată variaţia în timp a unui curent periodic şi sînt indicate perioada T, valoarea de vîrf $\hat{i}$, valoarea medie $\tilde{i} = I_0$ şi valoarea eficace I.

O mărime periodică a cărei valoare medie pe timpul unei perioade este nulă se numeşte *mărime alternativă*.

O mărime a cărei valoare instantanee păstrează tot timpul acelaşi semn se numeşte *mărime pulsatorie*.

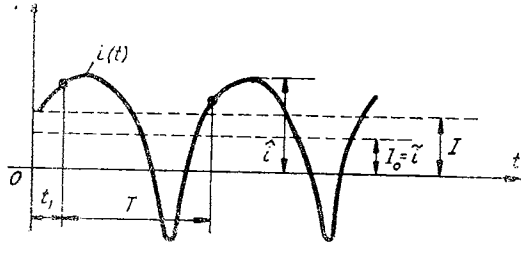


Fig. 15.1

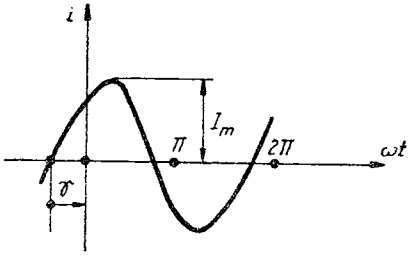


Fig. 15.2

15.1.2. Mărimi sinusoidale

Se numește mărime *sinusoidală* sau *armonică* o mărime alternativă care poate fi scrisă sub forma:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \gamma), \tag{15.6}$$

cu reprezentarea grafică din figura 15.2, în care I_m se numește valoare maximă sau amplitudine ($I_m = \hat{i}$), ω este pulsația, iar γ este faza inițială a mărimii sinusoidale.

Argumentul sinusului, adică mărimea liniar variabilă în timp ($\omega t + \gamma$), se numește *faza* mărimii sinusoidale.

Valoarea medie a unei mărimi sinusoidale, calculată cu relația (15.4) este nulă:

$$\tilde{i} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} I_m \cdot \sin(\omega t + \gamma) \cdot \mathrm{d}t = \frac{I_m}{\omega T}\cos(\omega t + \gamma)\Big|_{t_1+T}^{t_1} =$$

$$= \frac{I_m}{\omega T}[\cos(\omega t_1 + \gamma) - \cos(\omega t_1 + \gamma + \omega T)] = 0,$$

deoarece conform relației (15.2), $\omega T = 2\pi$, și paranteza patrată se anulează.

Se utilizează totuși, pentru caracterizarea mărimilor sinusoidale, o valoare medie calculată numai pentru semiunda pozitivă, astfel:

$$I_{med} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \cdot \mathrm{d}t = \frac{2I_m}{\omega T}\cos \omega t\Big|_{\frac{T}{2}}^{0} = \frac{2}{\pi} I_m. \tag{15.7}$$

Valoarea efectivă a unei mărimi sinusoidale se calculează cu relația (15.5):

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} I_m^2 \sin^2(\omega t + \gamma) \cdot \mathrm{d}t = \frac{I_m^2}{2T}\int_{t_1}^{t_1+T} [1 - \cos(2\omega t + 2\gamma)]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{I_m^2}{2T}\int_{t_1}^{t_1+T} \mathrm{d}t - \frac{I_m^2}{2T}\int_{t_1}^{t_1+T} \cos(2\omega t + 2\gamma) \cdot \mathrm{d}t = \frac{I_m^2}{2}.$$

Se obține:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \tag{15.8}$$

Raportul între valoarea efectivă și valoarea medie (calculată pentru semiunda pozitivă) a unei mărimi se numește *factor de formă* al undei:

$$K_f = \frac{I}{I_{med}}. \tag{15.9}$$

Pentru un curent sinusoidal factorul de formă are valoarea

$$K_f = \frac{I_m}{\sqrt{2}} : \frac{2I_m}{\pi} = 1{,}11. \tag{15.10}$$

În electrotehnică, se operează cu valorile efective ale mărimilor sinusoidale, și din acest motiv cu relațiile (15.6) și (15.8), rezultă:

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma). \tag{15.11}$$

Relația (15.11) se numește *forma normală în sinus* a unei mărimi sinusoidale.

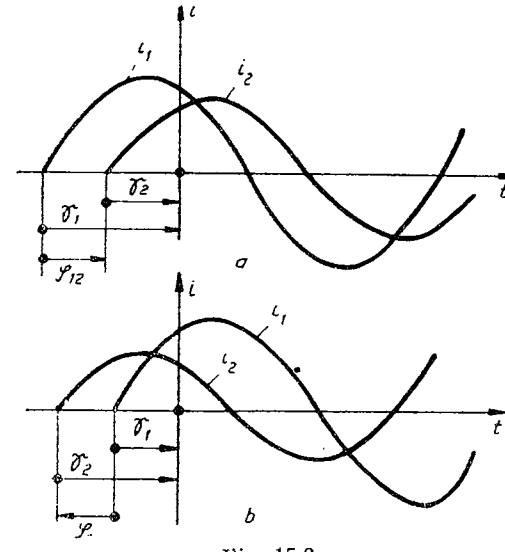


Fig. 15.3

O mărime sinusoidală este deci complet determinată dacă i se cunosc valoarea efectivă I, pulsația ω și faza inițială γ.

Diferența dintre fazele inițiale ale două mărimi sinusoidale se numește *defazaj*. Pentru două mărimi sinusoidale de forma: $i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_1)$ și $i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_2)$, defazajul este:

$$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2. \tag{15.12}$$

Acest defazaj poate fi pozitiv sau negativ. Dacă $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$, i_1 este defazat înaintea lui i_2 (fig. 15.3, *a*), iar dacă $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$, i_1 este defazat în urma lui i_2 (fig. 15.3, *b*).

Se pot ivi următoarele cazuri particulare: $\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 = 0$ (mărimile sînt în fază); $\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ (mărimile sînt în cuadratură); $\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 = \pm\pi$ (mărimile sînt în opoziție de fază).

15.1.3. Operații simple cu mărimi sinusoidale

Circuitele liniare de curent alternativ sînt descrise de ecuații integro — diferențiale liniare în care, asupra mărimilor sinusoidale se fac operațiile de adunare, înmulțire cu un scalar, derivare sau integrare. Prin aceste operații se obțin mărimi sinusoidale de aceeași frecvență.

a) Adunarea mărimilor sinusoidale, $i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_1)$ și $i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_2)$, conduce la o mărime sinusoidală de forma: $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$.

Prin identificare: $I\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma)=I_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma_1)+I_2\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma_2)$, se obține:

$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2+2I_1I_2\cos(\gamma_1-\gamma_2)}, \tag{15.13}$$

$$\gamma=\operatorname{arc\,tg}\frac{I_1\sin\gamma_1+I_2\sin\gamma_2}{I_1\cos\gamma_1+I_2\cos\gamma_2}. \tag{15.14}$$

b) Amplificarea unei mărimi sinusoidale cu un scalar λ conduce la o mărime sinusoidală de aceeași frecvență și aceeași fază inițială, dar cu valoarea efectivă amplificată de λ ori: $\lambda\cdot i_1=\lambda I_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma_1)$, deci

$$I=\lambda I_1. \tag{15.15}$$

c) Derivarea unei mărimi sinusoidale în raport cu timpul conduce la o mărime sinusoidală de aceeași frecvență, dar defazată înainte cu $\frac{\pi}{2}$ și avînd valoarea efectivă de ω ori mai mare:

$$\frac{di_1}{dt}=\omega I_1\sqrt{2}\cos(\omega t+\gamma_1)=\omega I_1\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\gamma_1+\frac{\pi}{2}\right). \tag{15.16}$$

d) Integrarea în timp a unei mărimi sinusoidale conduce la o mărime sinusoidală de aceeași frecvență, dar defazată în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ și avînd valoarea efectivă de ω ori mai mică:

$$\int_0^t i_1dt=-\frac{I_1\sqrt{2}}{\omega}\cos(\omega t+\gamma_1)=\frac{I_1}{\omega}\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\gamma_1-\frac{\pi}{2}\right). \tag{15.17}$$

15.2. REGIMUL PERMANENT SINUSOIDAL AL CIRCUITELOR LINIARE SIMPLE DETERMINAT PRIN METODA DIRECTĂ

Se consideră cîteva circuite simple, liniare, la bornele cărora se aplică o tensiune alternativă sinusoidală de forma:

$$u=U\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma_u) \tag{15.18}$$

și se cere să se găsească expresia curentului din circuit.

Metoda directă constă în scrierea ecuației integro-diferențiale a circuitului și căutarea unei soluții particulare a acesteia, de aceeași formă cu tensiunea aplicată, adică de forma:

$$i=I\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma_i). \tag{15.19}$$

În relația (15.19), necunoscutele sînt I și γ_i, care se determină prin identificare.

15.2.1. Circuitul serie *R*, *L* (fig. 15.4, *a*)

Ecuația circuitului este:

$$u=u_R+u_L. \tag{15.20}$$

Înlocuind valorile u, u_R și u_L conform relațiilor (15.18), (14.16) și (14.20), rezultă:

$$U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_u) = R \cdot i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{15.21}$$

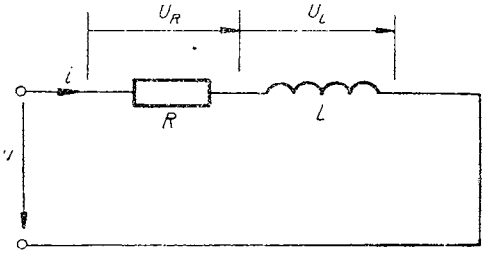
Se caută o soluție particulară a ecuației (15.21) sub forma (15.19).

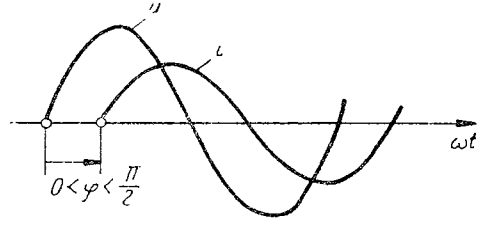
Prin identificare, se capătă relațiile:

$$U\sin\varphi = L\omega I \tag{15.22}$$

$$U\cos\varphi = RI, \tag{15.23}$$

în care s-a notat $\varphi = \gamma_u - \gamma_i$, diferența dintre faza inițială a tensiunii și a curentului (defazajul între tensiune și curent).





b

Fig. 15.4

Ridicînd la pătrat și adunînd relațiile (15.22) și (15.23) se obține:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \tag{15.24}$$

Radicalul de la numitor se numește *impedanța* circuitului serie R, L și se notează cu litera Z.

Împărțind relațiile (15.22) și (15.23) se obține:

$$\varphi = \text{arc tg}\frac{\omega L}{R}. \tag{15.25}$$

Din relațiile (15.22) și (15.23) se deduce: $\sin\varphi > 0$ și $\cos\varphi > 0$, deci:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \tag{15.26}$$

Cu relațiile (15.24) și (15.25) curentul ce se stabilește în circuitul serie R, L capătă forma:

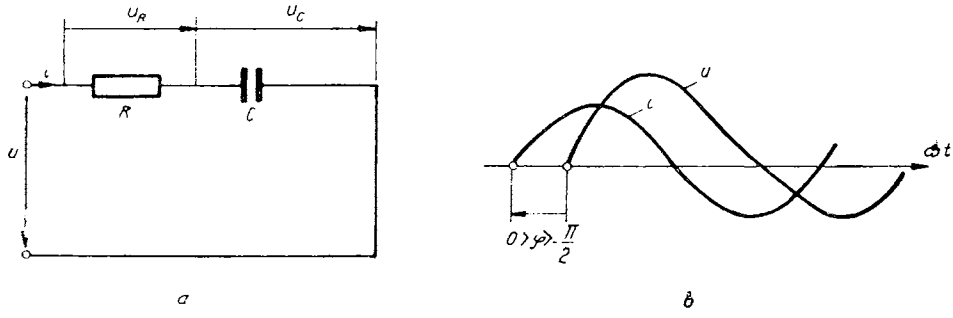
$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma_u - \text{arctg}\frac{\omega L}{R}\right). \tag{15.27}$$

În figura 15.4, *b* sînt reprezentate variația tensiunii și a curentului, în funcție de ωt.

15.2.2. Circuitul serie *R*, *C* (fig. 15.5, *a*)

Ecuația circuitului este:

$$u = u_R + u_C \tag{15.18}$$



a b

Fig. 15.5

care, cu relațiile (15.18), (14.16) și (14.24), devine:

$$U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_u) = R \cdot i + \frac{1}{C}\int i\,dt. \tag{15.29}$$

Substituind soluția de forma (15.19) și identificînd, se obțin relațiile:

$$U\sin\varphi = -\frac{1}{\omega C} I \tag{15.30}$$

$$U\cos\varphi = RI. \tag{15.31}$$

Ridicînd la pătrat și adunînd, rezultă:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}. \tag{15.32}$$

Radicalul de la numitor se numește *impedanța* circuitului serie R, C și se notează cu Z.

Împărțind relațiile (15.30) și (15.31) se obține:

$$\varphi = \text{arc tg}\left(-\frac{1}{\omega CR}\right). \tag{15.33}$$

Din (15.30) și (15.31) se deduce $\sin\varphi < 0$ și $\cos\varphi > 0$, și deci:

$$0 > \varphi > -\frac{\pi}{2}. \tag{15.34}$$

Cu relațiile (15.32) și (15.33), curentul are expresia:

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 \cdot C^2}}}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma_u + \text{arc tg}\frac{1}{\omega CR}\right). \tag{15.35}$$

În figura 15.5, *b* sînt reprezentate variația tensiunii și a curentului în funcție de ωt.

15.2.3. **Circuitul serie** R, L, C **(fig, 15.6)**

Ecuația circuitului este:

$$u = u_R + u_L + u_C \tag{15.36}$$

care, cu relațiile (15.18), (14.16), (14.20 și (14.24), devine:

$$U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_u) = R \cdot i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt. \tag{15.37}$$

Substituind soluția de forma (15.19) și identificînd, se obțin relațiile:

$$U \sin \varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I \tag{15.38}$$

$$U \cos \varphi = RI. \tag{15.39}$$

Ridicînd la pătrat și adunînd, rezultă:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{15.40}$$

Radicalul de la numitor se numește *impedanța* circuitului serie R, L, C și se notează cu litera Z.

Împărțind relațiile (15.38) și (15.39), rezultă:

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{15.41}$$

Din (15.38) și (15.39), se deduce $\sin \varphi \gtrless 0$ și $\cos \varphi > 0$, deci:

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}. \tag{15.42}$$

Cu relațiile (15.40) și (15.41), expresia curentului în circuitul serie R, L, C este:

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma_u - \text{arc tg}\,\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right). \tag{15.43}$$

Se observă că acest circuit cuprinde, în cazuri particulare, pe cele precedente: circuitul R, L (cînd $C \to \infty$) și circuitul R, C (cînd $L \to 0$).

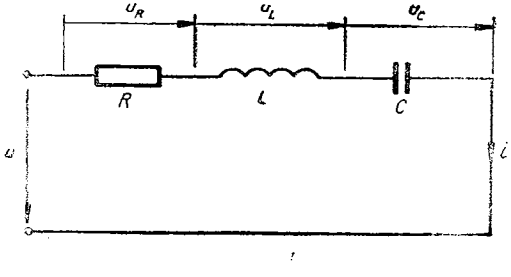


Fig. 15.6

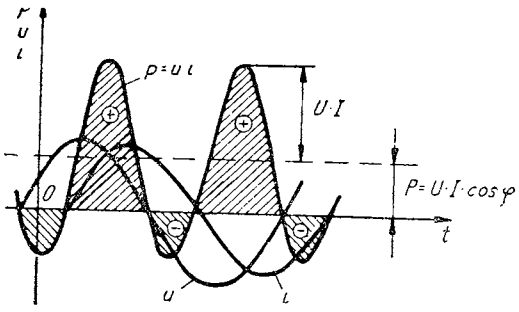


Fig. 15.7

Puterea instantanee la bornele unui circuit este (relația 14.15):

$$p = u \cdot i. \qquad (15.44)$$

În regim sinusoidal, înlocuind valorile lui u și i din relațiile (15.18) și (15.19), rezultă:

$$p = U\sqrt{2}\,\sin\,(\omega t + \gamma_u)\cdot I\sqrt{2}\,\sin\,(\omega t + \gamma_i). \qquad (15.45)$$

Dezvoltînd produsul sinusurilor se obține (cu $\varphi = \gamma_u - \gamma_i$) relația:

$$p = UI\cos\varphi - UI\cos\,(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i). \qquad (15.46)$$

În figura 15.7 se reprezintă variația puterii instantanee pentru un circuit oarecare.

Puterea instantanee este deci o mărime periodică, avînd o componentă constantă $UI\cos\varphi$ și o componentă de frecvență dublă. Amplitudinea de variație a puterii instantanee este UI.

15.3.1. Puterea activă

În procesele periodice, interesează de obicei energia consumată în circuit în intervalul unei perioade întregi, $T = 2\pi/\omega$, și corespunzător cu aceasta interesează valoarea medie a puterii pentru o perioadă întreagă.

Puterea medie absorbită într-o perioadă, numită *putere activă*, este deci:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\cdot \mathrm{d}t. \qquad (15.47)$$

Efectuînd integrala (15.47), ținînd cont de relația (15.46), se obține expresia puterii active:

$$P = U\cdot I\cos\varphi \geqslant 0. \qquad (15.48)$$

Unitatea de măsură a puterii active, în sistemul internațional, este *wattul* (W).

Corespunzător acestei puteri active (relația 15.48), în curent alternativ, se definește *rezistența* (relația 14.14) astfel:

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{U}{I}\cos\varphi. \qquad (15.49)$$

În mod similar, *conductanța* în curent alternativ este definită de relația:

$$G = \frac{P}{U^2} = \frac{I}{U}\cos\varphi. \qquad (15.50)$$

15.3.2. Puterea aparentă. Factor de putere

Se numește *putere aparentă* și se notează cu S, produsul valorilor efective ale tensiunii și curentului:

$$S = UI. \tag{15.51}$$

Ea reprezintă amplitudinea de variație a puterii instantanee dintr-un circuit electric (vezi fig. 15.7). Puterea aparentă se măsoară în *volt amper* (VA).

Raportul dintre puterea aparentă și pătratul valorii efective a curentului se numește *impedanță*:

$$Z = \frac{S}{I^2} = \frac{U}{I}. \tag{15.52}$$

Valoarea inversă a impedanței se numește *admitanță*:

$$Y = \frac{S}{U^2} = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z}. \tag{15.53}$$

Se numește *factor de putere* raportul pozitiv dintre puterea activă P și cea aparentă S:

$$K_p = \frac{P}{S} \geqslant 0. \tag{15.54}$$

În regim sinusoidal, factorul de putere este

$$K_p = \cos \varphi. \tag{15.55}$$

15.3.3. Puterea reactivă

Prin analogie cu puterea activă (relația 15.48) se definește o *putere reactivă* cu relația:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi. \tag{15.56}$$

Puterea reactivă se introduce ca o mărime complementară puterii active pentru a se putea obține puterea aparentă (sau puterea totală) S.

Din (15.48), (15.51) și 15.56) rezultă:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}. \tag{15.57}$$

Puterea reactivă se măsoară în *volt-amper-reactiv* (VAr).

Raportul între puterea reactivă și pătratul valorii efective a curentului se numește *reactanță*:

$$X = \frac{Q}{I^2} = \frac{U}{I} \sin \varphi. \tag{15.58}$$

În mod similar se definește *susceptanța*, ca raportul dintre puterea reactivă și pătratul valorii efective a tensiunii:

$$B = \frac{Q}{U^2} = \frac{I}{U} \sin \varphi. \tag{15.59}$$

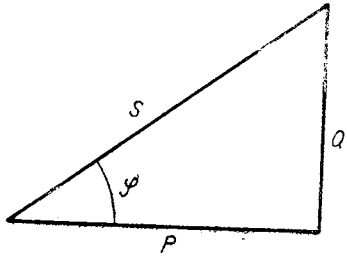


Fig. 15.8

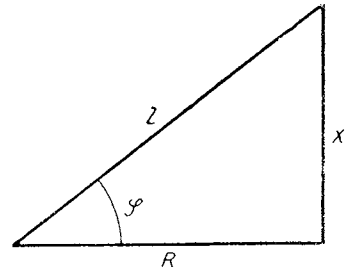


Fig. 15.9

15.3.4. **Triunghiul puterilor, al impedanței și al admitanței**

Din relația (15.57) rezultă că puterilor într-un circuit electric li se poate atașa un triunghi dreptunghic în care ipotenuza este egală cu puterea aparentă S, iar cele două catete sînt puterea activă P și puterea reactivă Q (fig. 15.8). Acest triunghi se numește triunghiul puterilor, iar unghiul format de puterea aparentă S cu puterea activă P este chiar unghiul de defazaj între tensiune și curent.

Din acest triunghi se pot stabili relațiile:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}\,;\ \sin \varphi = \frac{Q}{S}\,;\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} \tag{15.60}$$

$$P = S \cos \varphi\,;\ Q = S \cdot \sin \varphi\,;\ S^2 = P^2 + Q^2. \tag{15.61}$$

Împărțind laturile triunghiului puterilor prin I^2 se obține un triunghi asemenea, numit triunghiul impedanței (fig. 15.9), în care ipotenuza este Z, iar cele două catete sînt R și X. Din acest triunghi rezultă relațiile:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}\,;\ \sin \varphi = \frac{X}{Z}\,;\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} \tag{15.62}$$

$$R = Z \cos \varphi\,;\quad X = Z \sin \varphi\,;\quad Z^2 = R^2 + X^2. \tag{15.63}$$

Împărțind laturile triunghiului puterilor prin U^2 se obține din nou un triunghi asemenea, numit triunghiul admitanței, în care ipotenuza este Y, iar cele două catete sînt G și B (fig. 15.10).

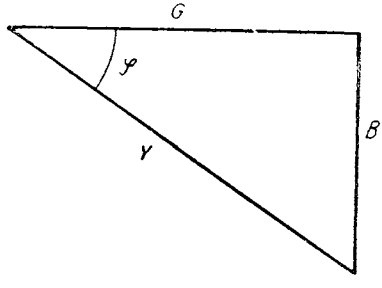


Fig. 15.10

Din acest triunghi rezultă relațiile:

$$\cos \varphi = \frac{G}{Y}\,;\ \sin \varphi = \frac{B}{Y}\,;\quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{G}. \tag{15.64}$$

$$G = Y \cos \varphi\,;\ B = Y \sin \varphi\,;\quad Y^2 = G^2 + B^2. \tag{15.65}$$

Observații

Așa cum au fost definite rezistența R și conductanța G, în curent alternativ ele nu sînt mărimi inverse ca în curent continuu. Numai într-un caz cu totul particular, cînd $\varphi = 0$, relațiile (15.49) și (15.50) conduc la $R = \frac{1}{G}$; dar în general,

$$R \neq \frac{1}{G}. \tag{15.66}$$

De asemenea, numai în cazul particular cînd $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rezultă din (15.58) și (15.59) $X = \frac{1}{B}$, însă în general avem:

$$X \neq \frac{1}{B}. \tag{15.67}$$

Conform relațiilor (15.52) și (15.52), întotdeauna există egalitatea:

$$Y = \frac{1}{Z}. \tag{15.68}$$

Se pot stabili însă relațiile:

$$G = Y \cos \varphi = \frac{\cos \varphi}{Z} = \frac{Z \cos \varphi}{Z^2} = \frac{R}{Z^2}. \tag{15.69}$$

și

$$B = Y \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{Z} = \frac{Z \sin \varphi}{Z^2} = \frac{X}{Z^2}. \tag{15.70}$$

15.4. REPREZENTAREA SIMBOLICĂ A MĂRIMILOR SINUSOIDALE

În cazul circuitelor electrice care au o structură mai complicată, determinarea regimului permanent prin metoda directă expusă în paragraful 15.2 este foarte dificilă și prea puțin intuitivă. Din acest motiv facem apel la reprezentări simbolice pentru mărimile sinusoidale, care conduc la o rezolvare simplă a circuitelor. Prin reprezentări simbolice calculul circuitelor de curent alternativ devine tot atît de simplu ca și pentru circuitele de curent continuu.

Pentru ca rezolvarea simbolică să fie eficientă, ea trebuie să îndeplinească următoarele cerințe:

a) Reprezentarea să fie biunivocă, adică fiecărei mărimi sinusoidale să-i corespundă un simbol și fiecărui simbol să-i corespundă o mărime sinusoidală și numai una.

b) Calculul cu simboluri să fie mult mai ușor decît cu mărimea sinusoidală.

c) Trecerea de la mărimea sinusoidală la simbolul ei precum și invers de la simbol la mărimea sinusoidală să se facă ușor.

În studiul circuitelor de curent alternativ care funcționează în regim *permanent sinusoidal* se utilizează două tipuri de reprezentări simbolice:

reprezentarea geometrică (prin fazori) și *reprezentarea analitică (în complex)*. În general în cadrul aceleiași probleme de utilizează ambele reprezentări în mod simultan. Ambele reprezentări sînt în plan.

15.4.1. Reprezentarea geometrică (prin fazori)

Dacă se consideră o mărime sinusoidală de forma,

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma), \tag{15.71}$$

se observă că acesteia i se poate atașa în planul x_0Oy_0 (fig.15.11) un vector $\overline{OA}$, al cărui modul este

$$OA = I\sqrt{2}. \tag{15.72}$$

și care formează cu axa Ox_0 unghiul

$$\widehat{AOx_0} = \omega t + \gamma. \tag{15.73}$$

Acest vector care se va numi în continuare *fazor* (pentru a se deosebi de vectorii din mecanică) se bucură de proprietatea că proiecția sa pe axa Oy_0 este egală în orice moment cu valoarea instantanee a curentului, dată de (15.71).

Se poate scrie corespondența biunivocă între mărimea sinusoidală și acest fazor astfel:

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \overline{OA} \begin{cases} OA = I\sqrt{2} \\ \widehat{AOx_0} = \omega t + \gamma \end{cases} \tag{15.74}$$

Vectorul $\overline{OA}$, care se numește fazor, nu reprezintă un curent electric, ci el este numai un simbol al curentului electric.

Relația (15.74) se mai scrie simplificat astfel:

$$\overline{OA} = I\sqrt{2}\underline{/\omega t + \gamma} \tag{15.75}$$

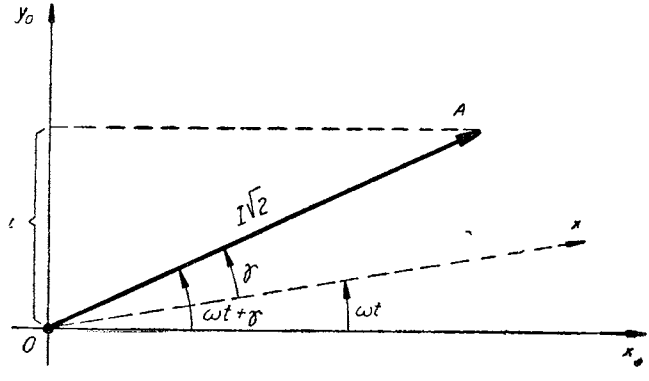


Fig. 15.11

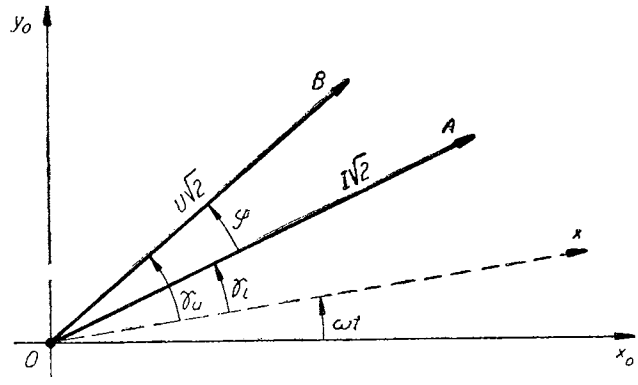


Fig. 15.12

Axa Ox, care face un unghi ωt cu axa Ox_0, se numește *axa origine de fază*. Fazorul OA se rotește în sens trigonometric cu viteza unghiulară ω, la fel ca și axa origine de fază ; între fazorul OA și axa Ox se păstrează însă unghiul constant γ, egal cu faza inițială a mărimii sinusoidale căreia i s-a atașat fazorul.

Această reprezentare geometrică prin fazori este foarte sugestivă și intuitivă. Ea pune în evidență amplitudinea mărimii sinusoidale (egală cu modulul fazorului) precum și faza sa (egală cu argumentul fazorului reprezentativ).

Dacă de exemplu se reprezintă prin fazori două mărimi sinusoidale

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_i) \tag{15.76}$$

și

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_u), \tag{15.77}$$

din diagrama fazorială se poate găsi simplu defazajul între aceste mărimi

$$\varphi = \gamma_u - \gamma_i, \tag{15.78}$$

așa cum este arătat în fig. 15.12.

Curentul (relația 15.76) este reprezentat prin fazorul OA, iar tensiunea (relația 15.77) prin fazorul OB.

Corespondența operațiunilor în reprezentarea fazorială. În studiul circuitelor electrice funcționînd în regim permanent sinusoidal, operațiile care se efectuează asupra mărimilor sinusoidale sînt amplificarea cu un scalar, adunarea, derivarea sau integrarea în timp a mărimilor sinusoidale. Acestor operații (care nu modifică pulsația mărimii sinusoidale) le corespund în reprezentarea fazorială următoarele :

a) Amplificarea cu un scalar λ a mărimii sinusoidale corespunde cu amplificarea fazorului reprezentativ prin același scalar λ. Fazorul reprezentativ își mărește deci modulul de λ ori, fără a-și modifica faza. Există deci corespondența biunivocă :

$$\lambda \cdot i \rightleftarrows \lambda \cdot \overline{OA} = \lambda I\sqrt{2}\underline{/\omega t + \gamma}. \tag{15.79}$$

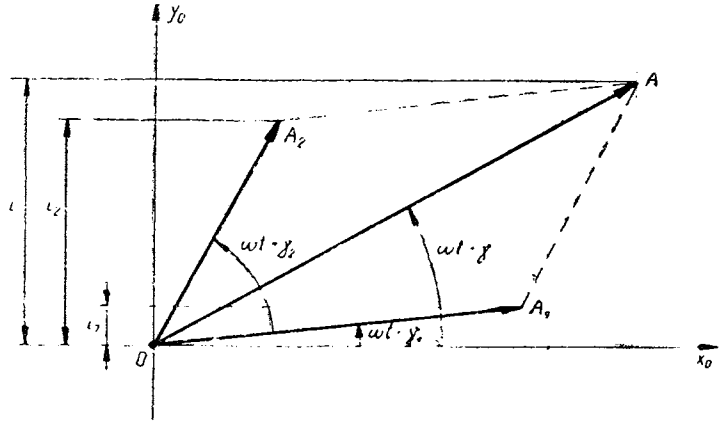


Fig. 15.13

b) Adunarea mărimilor sinusoidale corespunde biunivoc cu adunarea vectorială a fazorilor reprezentativi (fig. 15.13):

$$i_1 + i_2 \rightleftarrows \overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 = I_1\sqrt{2}\underline{/\omega t + \gamma_1} + I_2\sqrt{2}\underline{/\omega t + \gamma_2}. \qquad (15.80)$$

Această corespondență rezultă imediat, folosind interpretarea mărimilor sinusoidale ca fiind proiecțiile fazorilor pe axa Oy_0 și utilizînd regula de adunare a fazorilor: *proiecția sumei a doi vectori este egală cu suma proiecțiilor celor doi vectori.*

c) Derivarea unei mărimi sinusoidale corespunde cu înmulțirea modulului fazorului prin ω și rotirea sa în sens direct (trigonometric) cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 15.14):

$$\frac{di}{dt} \rightleftarrows \omega I\sqrt{2}\underline{/\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}}. \qquad (15.81)$$

Într-adevăr, dacă curentul este de forma (15.71), în reprezentarea fazorială îi corespunde fazorul OA (fig. 15.14). Prin derivare, relația (15.71) devine:

$$\frac{di}{dt} = \omega I\sqrt{2}\cos(\omega t + \gamma) = \omega I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (15.82)$$

Mărimii sinusoidale (15.82), în reprezentarea fazorială, îi corespunde fazorul OB, care are modulul amplificat cu ω și argumentul mai mare cu $\frac{\pi}{2}$ față de fazorul OA.

d) Integrarea în timp a unei mărimi sinusoidale corespunde cu împărțirea modulului fazorului prin ω și rotirea sa în sens invers (în sensul acelor de ceasornic) cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 15.15):

$$\int i\,dt \rightleftarrows \frac{I}{\omega}\sqrt{2}\underline{/\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}}. \qquad (15.83)$$

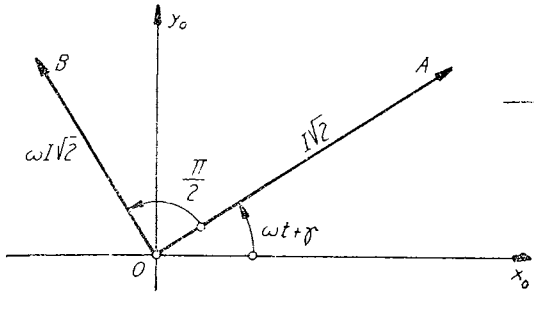


Fig. 15.14

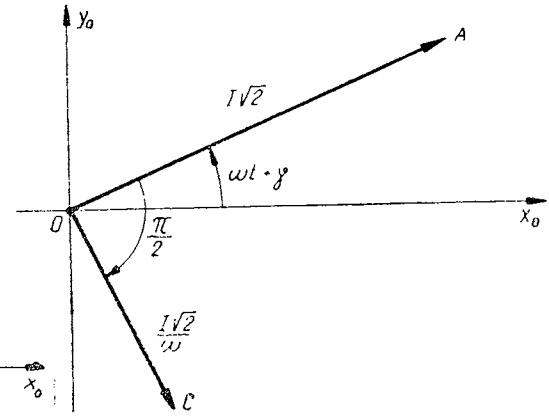


Fig. 15.15

Într-adevăr, dacă mărimea sinusoidală (15.71) se reprezintă prin fazorul OA, integrînd relația (15.71) se obține mărimea sinusoidală:

$$\int i dt = -\frac{I\sqrt{2}}{\omega}\cos(\omega t+\gamma) = \frac{I\sqrt{2}}{\omega}\sin\left(\omega t+\gamma-\frac{\pi}{2}\right), \qquad (15.84)$$

căreia îi corespunde fazorul OC în figura 15.15.

Observație importantă

În reprezentarea fazorială expusă mai sus, toți fazorii reprezentativi erau fazori rotitori cu aceeași viteză unghiulară ω față de sistemul de coordonate X_0OY_0. Alegînd axa originii de fază OX, care se rotește și ea cu aceeași viteză unghiulară ω (vezi fig. 15.11), față de această axă, toți fazorii sînt ficși, dar își păstrează fazele inițiale (unghiul de defazaj dintre fazori). Rezultă că în sistemul de coordonate XOY (care se rotește în sens trigonometric cu viteza ω) toți fazorii sînt ficși. În plus, deoarece în reprezentarea fazorială toate mărimile conțin termenul $\sqrt{2}$, el poate fi suprimat.

Această reprezentare este o *reprezentare fazorială simplificată, valabilă numai pentru mărimi sinusoidale de aceeași pulsație.*

Toate proprietățile demonstrate mai sus rămîn valabile, adică:

a) Amplificarea mărimii sinusoidale cu un scalar se traduce prin amplificarea fazorului cu acel scalar.

b) Adunarea a două mărimi sinusoidale se traduce prin adunarea (geometrică) a celor doi fazori reprezentativi.

c) Derivarea unei mărimi sinusoidale se traduce prin amplificarea fazorului cu ω și rotirea sa în sens direct cu $\frac{\pi}{2}$.

d) Integrarea mărimii sinusoidale se traduce prin împărțirea fazorului cu ω și rotirea sa în sens invers cu $\frac{\pi}{2}$.

În figura 15.16 este reprezentată mărimea sinusoidală prin fazorul OA, derivata sa prin fazorul OB și integrala sa prin fazorul OC (reprezentare simplificată, în sistemul de axe XOY). De obicei, axa OX nu se mai trasează, deoarece în toate problemele unul dintre fazorii reprezentativi (tensiune sau curent) se ia origine de fază și toate celelalte mărimi apar defazate înaintea sau în urma acesteia.

Exemplu

Rezolvarea circuitului serie R, L, C, utilizînd reprezentarea fazorială a mărimilor sinusoidale (fig. 15.17).

Ecuația circuitului (aplicînd legea lui Ohm) este:

$$u = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t. \tag{15.85}$$

Se cere să se determine curentul, cunoscînd parametrii R, L, C și tensiunea aplicată u.

Curentul din circuit (fiind sinusoidal, de aceeași formă cu tensiunea aplicată) este caracterizat prin valoarea sa efectivă I și prin defazajul său φ față de tensiune. Considerînd curentul ca origine de fază, se construiește (fig. 15.17, *b*) suma fazorială corespunzătoare membrului drept al relației (15.85), ținînd cont de corespondența operațiilor stabilită mai sus.

Suma din membrul drept trebuie să fie egală cu tensiunea aplicată (poligonul se închide).

Din triunghiul dreptunghic OAB se deduce:

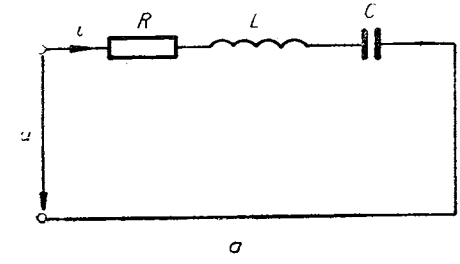
$$U^2 = R^2I^2 + \left(L\omega I - \frac{I}{\omega C}\right)^2, \tag{15.86}$$

de unde:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \tag{15.87}$$

Apoi,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega I - \dfrac{I}{\omega C}}{RI} = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}, \tag{15.88}$$



a

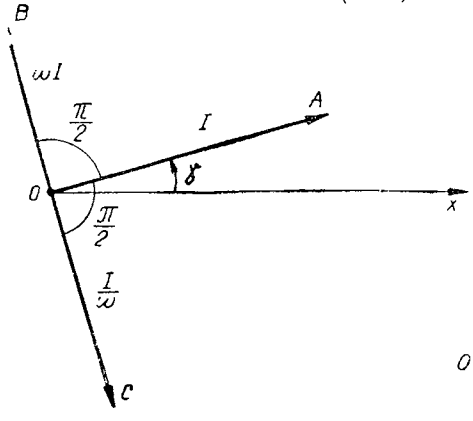
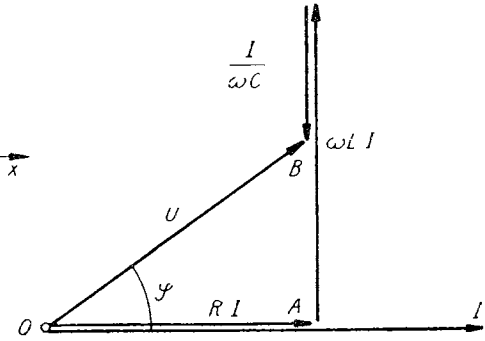


Fig. 15.16



b

Fig. 15.17

de unde:

$$\varphi = \text{atc tg}\frac{\omega L - \frac{1}{C\omega}}{R} \tag{15.89}$$

Relaţiile (15.87) şi (15.89) au rezolvat problema pusă.

15.4.2. Reprezentarea analitică (în complex)

După cum se ştie din algebra numerelor complexe, fiecărui număr complex îi corespunde biunivoc în planul complex al lui Gauss un punct (afixul numărului) şi deci îi corespunde un vector de poziţie. Rezultă că identificînd planul reprezentării geometrice cu planul complex, stabilim o corespondenţă biunivocă între funcţiile sinusoidale şi numerele complexe.

Aşa cum în reprezentarea geometrică mărimea sinusoidală se obţinea ca fiind proiecţia fazorului reprezentativ pe axa transversală OY_0, la reprezentarea în complex mărimea sinusoidală se obţine ca fiind partea imaginară a numărului complex reprezentativ (dacă se identifică axa OX_0 cu axa reală şi axa OY_0 cu axa imaginară).

Mărimii sinusoidale de forma:

$$i = I\sqrt{2}\,\sin\,(\omega t + \gamma), \tag{15.90}$$

îi ataşăm în planul complex simbolul $\underline{i}$, numit *valoare instantanee* complexă avînd forma:

$$\underline{i} = I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}, \tag{15.91}$$

care în planul complex (fig. 15.18) este reprezentat printr-un vector de poziţie cu modulul $I\sqrt{2}$ şi argumentul $(\omega t + \gamma)$.

Există deci corespondenţa biunivocă:

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \underline{i} = I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}. \tag{15.92}$$

Numărul complex (15.91) se bucură de proprietatea că proiecţia sa pe axa imaginară este chiar mărimea sinusoidală, deci avem:

$$i = \mathfrak{Im}\,(\underline{i}) = \mathfrak{Im}\,[I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}] \tag{15.93}$$

Această egalitate se deduce uşor, dacă se dezvoltă (15.91) cu formula lui Euler:

$$\underline{i} = I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)} = I\sqrt{2}\,\cos(\omega t + \gamma) + jI\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \gamma) \tag{15.94}$$

Corespondenţa operaţiilor în reprezentarea complexă a mărimilor sinusoidale rezultă imediat.

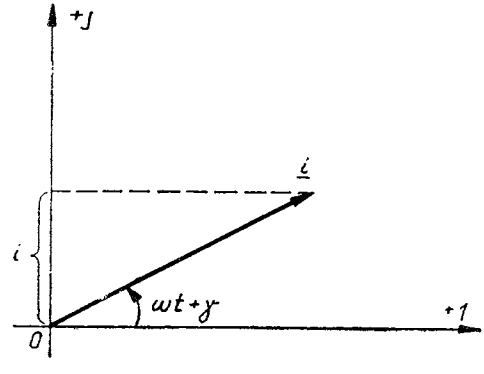


Fig. 15.18

a) Amplificarea mărimii sinusoidale cu un scalar real corespunde biunivoc cu amplificarea imaginii complexe prin acel scalar:

$$\lambda \cdot i \rightleftarrows \lambda \cdot \underline{i} \tag{15.95}$$

b) Adunarea mărimilor sinusoidale corespunde biunivoc adunării imaginilor complexe:

$$i_1 + i_2 \rightleftarrows \underline{i}_1 + \underline{i}_2 \tag{15.96}$$

c) Derivarea mărimii sinusoidale corespunde cu înmulțirea imaginii complexe prin $j\omega$:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \rightleftarrows j\omega \underline{i} \tag{15.97}$$

Aceasta se poate vedea imediat, astfel: derivata curentului sinusoidal, dat de (15.71), este:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega I \sqrt{2} \cos(\omega t + \gamma) = \omega I \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right). \tag{15.98}$$

Imaginea în complex a derivatei este, conform (15.92):

$$\omega I \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{j\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega I \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{j(\omega t + \gamma)} = j\omega \underline{i} \tag{15.99}$$

d) Integrarea în timp a mărimii sinusoidale corespunde biunivoc cu împărțirea imaginii complexe prin numărul $j\omega$:

$$\int i \,\mathrm{d}t \rightleftarrows \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{i}. \tag{15.100}$$

Aceasta se demonstrează ca și mai sus.

Observație importantă

Ca și în cazul reprezentării geometrice, există și în reprezentarea complexă varianta *simplificată*. În reprezentarea *complexă simplificată*, planul complex al lui Gauss se identifică cu planul *XOY* al reprezentării *geometrice simplificate*. În acest caz numerele complexe nu mai sînt funcții de timp, iar termenul parazit $\sqrt{2}$ este suprimat.

Acestei reprezentări complexe simplificate îi corespunde operația:

$$i = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \underline{I} = I\, \mathrm{e}^{j\gamma}. \tag{15.101}$$

Mărimea $\underline{I}$ se numește *valoare efectivă complexă*.

Relația (15.101) pune în evidență numai valorile care sînt caracteristice fiecărei mărimi sinusoidale în parte, adică valoarea efectivă I și faza inițială γ.

Reprezentarea în complex simplificat este valabilă numai pentru mărimi sinusoidale care au *aceeași pulsație*.

Corespondența operațiilor este exact ca la punctele *a*, *b*, *c* și *d* de mai sus.

Exemplu

Rezolvarea circuitului serie R, L, C prin reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale.

Se consideră circuitul din figura 15.17, care este descris de ecuația:

$$u = R \cdot i + L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} \int i \, \mathrm{d}t. \tag{15.102}$$

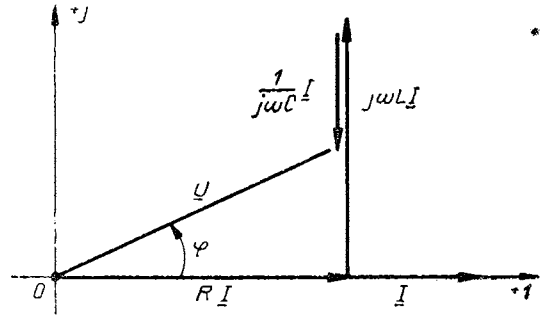


Fig. 15.19

Conform regulilor deduse mai sus, referitor la corespondența operațiilor, relația (15.102) se transcrie în complex simplificat:

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I}. \tag{15.103}$$

Ecuația (15.103) este reprezentată în planul complex prin diagrama din figura 15.19, care după cum se vede este identică cu diagrama fazorială din figura 15.17, *b*.

Rezolvarea ecuației (15.103) conduce la:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}; \tag{15.104}$$

cu:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{15.105}$$

și

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{15.106}$$

15.5. CARACTERIZAREA ÎN COMPLEX A CIRCUITELOR LINIARE

Circuitele liniare de curent alternativ au fost caracterizate în paragrafele 15.2 și 15.3 prin parametrii reali (impedanța, admitanța etc), iar regimul energetic al lor prin puterile reale P, Q și S.

În cele ce urmează se introduc, pentru caracterizarea circuitelor liniare, parametrii complecși (impedanța și admitanța complexă) și puterea complexă (puterea aparentă complexă).

15.5.1. Impedanța și admitanța complexă

Raportul dintre tensiunea complexă și curentul complex (simplificat sau nesimplificat) definește o mărime complexă caracteristică unei ramuri de circuit, numită *impedanță complexă* (fig. 15.20, *a*):

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j(\omega t + \gamma_u)}}{I\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j(\omega t + \gamma_i)}} = \frac{U}{I}\,\mathrm{e}^{j(\gamma_u - \gamma_i)} = \frac{U}{I}\,\mathrm{e}^{j\varphi}. \tag{15.107}$$

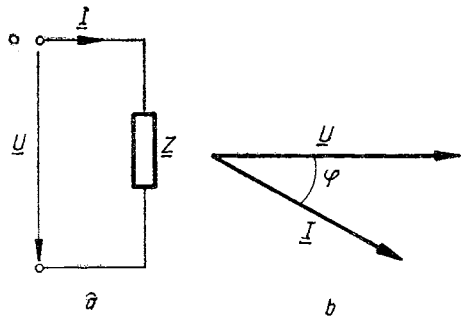


Fig. 15.20

Dezvoltînd relaţia (15.107) după formula lui Euler, se obţine:

$$\underline{Z} = \frac{U}{I}\cos\varphi + j\frac{U}{I}\sin\varphi. \tag{15.108}$$

Identificînd (15.108) cu (15.49) şi (15.58), rezultă:

$$\underline{Z} = R + jX; \tag{15.109}$$

apoi

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \tag{15.110}$$

Conform relaţiilor (15.109) şi (15.110) rezultă că impedanţa complexă nu depinde de valoarea curentului sau a tensiunii şi ea are modulul egal cu impedanţa reală a circuitului, argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală egală cu rezistenţa circuitului şi partea imaginară egală cu reactanţa circuitului.

Deoarece impedanţa complexă este un număr complex, ea poate fi reprezentată în planul complex (fig. 15.21) al impedanţei.

Raportul dintre curentul complex şi tensiunea complexă dintr-o ramură a unui circuit se numeşte *admitanţa complexă:*

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I}{U}\,e^{-j\varphi}, \tag{15.111}$$

sau dezvoltat:

$$\underline{Y} = \frac{I}{U}\cos\varphi - j\frac{I}{U}\sin\varphi. \tag{15.112}$$

Din relaţiile (15.50) şi (15.59), rezultă:

$$\underline{Y} = G - jB \tag{15.113}$$

şi

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}. \tag{15.114}$$

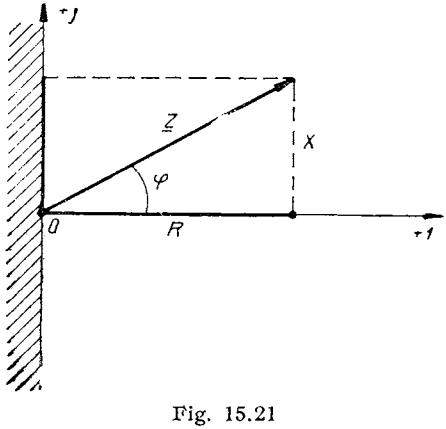


Fig. 15.21

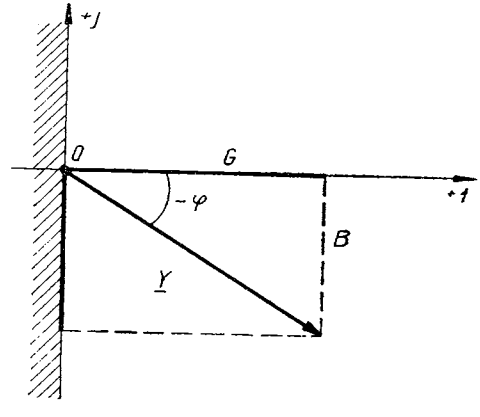


Fig. 15.22

La fel ca și impedanța complexă, admitanța complexă caracterizează o ramură a circuitului și are modulul egal cu admitanța reală, argumentul egal cu defazajul cu semn schimbat, partea reală egală cu conductanța circuitului și partea imaginară egală cu susceptanța cu semn schimbat.

Admitanța fiind un număr complex se poate reprezenta într-un plan complex (fig. 15.22) al admitanței.

Observații

Impedanța și admitanța nu se pot reprezenta în același plan complex cu tensiunea sau curentul, deoarece ele nu sînt mărimi sinusoidale. Ele sînt niște *operatori* complecși, care intervin în ecuațiile circuitului, pe lîngă imaginile complexe ale curentului sau ale tensiunii. Mărimile complexe $\underline{Z}$ și $\underline{Y}$ nu pot ocupa decît semiplanul drept al planului complex, deoarece mărimile R și G sînt întotdeauna pozitive.

15.5.2. Puterea complexă

Deoarece puterea instantanee (relația 15.46) nu este o mărime sinusoidală ei nu i se poate atașa un simbol complex; totuși pentru a scrie sub o formă compactă cele trei puteri (P, S, Q) date de (15.48), (15.51) și (15.56), se folosește scrierea complexă a puterii aparente, sub forma:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*, \tag{15.115}$$

în care $\underline{U}$ este valoarea efectivă complexă a tensiunii, iar $\underline{I}^*$ valoarea efectivă complexă conjugată a curentului.

Utilizînd simbolurile complexe ale curentului și tensiunii, rezultă:

$$\underline{S} = U e^{j\psi_u} \cdot I \cdot e^{-j\psi_i} = U \cdot I e^{j\varphi} = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi. \tag{15.116}$$

Cu relațiile (15.48) și (15.56), rezultă:

$$\underline{S} = P + jQ, \tag{15.117}$$

apoi

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{15.118}$$

Puterea complexă are deci modulul egal cu puterea aparentă, argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală egală cu puterea activă și partea imaginară egală cu puterea reactivă.

Ca orice număr complex, puterea complexă se poate reprezenta în planul complex (fig. 15.23) al puterilor.

Numărul complex $\underline{S}$ poate ocupa oricare din cele patru cadrane ale planului complex, în funcție de semnul puterii active P și al puterii reactive Q. Astfel, pentru ramuri receptoare (unde $P > 0$) puterea complexă $\underline{S}$ se află în cadranele 1 și 4, iar pentru ramuri generatoare ($P < 0$) în cadranele 2 și 3.

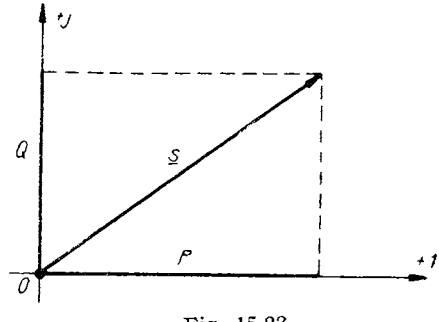


Fig. 15.23

Planul complex al puterii este diferit de planul complex al impedanței și de planul complex al tensiunilor și curenților.

Utilizînd relațiile de definiție ale impedanței și admitanței complexe, rezultă:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot I^2 = \underline{Y}^* \cdot U^2 = (R + \mathrm{j}X)\, I^2 = (G + \mathrm{j}B)\, U^2. \quad (15.119)$$

15.5.3. Caracterizarea în complex a unor ramuri de circuit

Dacă se consideră o ramură a unui circuit pasiv care conține elementele R, L, C (fig. 15.17), pentru a o caracteriza în complex, se scrie ecuația circuitului (în complex):

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + \mathrm{j}\omega L\, \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}. \quad (15.120)$$

Se găsește apoi impedanța complexă:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (15.121)$$

Identificînd cu (15.109), rezistența va fi R, iar reactanța va fi:

$$X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Admitanța complexă este

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \mathrm{j}\,\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (15.122)$$

Identificînd cu (15.113), se obține:

$$G = \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (15.123)$$

$$B = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (15.124)$$

Puterea complexă, din (15.119), rezultă:

$$\underline{S} = (R + \mathrm{j}X)\, I^2 = RI^2 + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I^2, \quad (15.125)$$

cu:

$$P = RI^2$$

şi

$$Q = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I^2. \tag{15.126}$$

Particularizînd relaţiile (15.121) ÷ (15.126) se obţine caracterizarea în complex a unor ramuri simple de circuit.

15.6. TEOREMELE CIRCUITELOR LINIARE SUB FORMA COMPLEXĂ

Pentru studiul circuitelor liniare, funcţionînd în regim permanent sinusoidal, se utilizează legea lui Ohm şi teoremele lui Kirchhoff. În scrierea complexă acestea capătă forme asemănătoare celor utilizate în circuite de curent continuu.

15.6.1. Forma complexă a legii lui Ohm

Fie o latură activă (fig. 15.24), caracterizată prin parametrii R, L, C şi avînd un generator de tensiune electromotoare sinusoidală e_g. Considerînd o curbă închisă Γ, care se închide pe un traseu indicat în figură, în sens contrar tensiunii la borne u_b, efectuînd integrala $\oint_\Gamma \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s}$ pe acest traseu, se obţine din legea inducţiei electromagnetice:

$$\oint_\Gamma \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + e_g. \tag{15.127}$$

Membrul întîi al relaţiei (15.127), descompus pe porţiuni de circuit, se scrie:

$$\oint_\Gamma \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = u_R + u_c - u_b, \tag{15.128}$$

în care u_R şi u_c sînt căderile de tensiune la bornele rezistenţei şi respectiv condensatorului, date de (14.16) şi (14.24).

Fluxul magnetic Φ este produs atît de curentul i cît şi de curenţii din alte ramuri ale circuitului, cuplate inductiv cu latura considerată. Se poate scrie deci:

$$\Phi = L \cdot i + \Phi^{(ex)} \tag{15.129}$$

Egalînd relaţiile (15.127) şi (15.128) şi ţinînd cont de (14.16), (14.24) şi (15.129), rezultă ecuaţia:

$$e_g - \frac{\mathrm{d}\Phi^{(ex)}}{\mathrm{d}t} + u_b = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t. \tag{15.130}$$

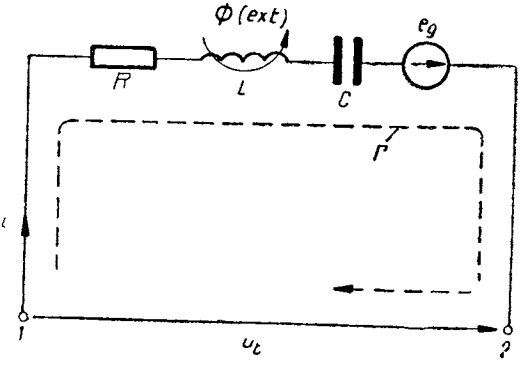


Fig. 15.24

Transcriind în complex relația (15.130), se obține:

$$\underline{E}_g - j\omega\underline{\Phi}^{(ex)} + \underline{U}_b = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{I}, \tag{15.131}$$

sau prescurtat

$$\underline{E}_g - j\omega\underline{\Phi}^{(ex)} + \underline{U}_b = \underline{Z} \cdot \underline{I}, \tag{15.132}$$

în care $\underline{Z}$ este impedanța complexă proprie a laturii. Această relație reprezintă legea lui Ohm în complex.

Pentru laturi necuplate inductiv ($\Phi^{(ex)} = 0$), se obține legea lui Ohm în complex sub forma:

$$\underline{E}_g + \underline{U}_b = \underline{Z} \cdot \underline{I}, \tag{15.133}$$

care are exact aceeași formă ca și în curent continuu.

15.6.2. Forma complexă a teoremelor lui Kirchhoff

a) Prima teoremă a lui Kirchhoff se referă la noduri de rețea și ea se obține aplicînd teorema continuității curentului electric (relația 14.5) pentru o suprafață închisă Σ, care înconjoară un nod oarecare (q) al unei rețele (vezi fig. 15.25). Conform acestei teoreme, suma algebrică a valorilor instantanee ale curenților care intră în nod este nulă:

$$\sum_{k \in q} i_k = 0. \tag{15.134}$$

Pentru cazul considerat în figura 15.25, se poate scrie:

$$i_1 + i_2 - i_3 + i_k - i_5 = 0. \tag{15.135}$$

Semnul $k \in q$ arată apartenența laturii k nodului q considerat.

Relația (15.134) transcrisă în complex devine:

$$\sum_{k \in q} \underline{I}_k = 0, \tag{15.136}$$

adică *suma algebrică a imaginilor în complex ale curenților care intră într-un nod este nulă.* Aceasta este prima teoremă a lui Kirchhoff.

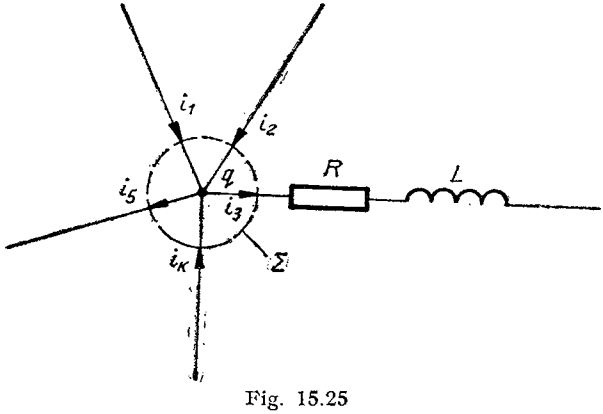


Fig. 15.25

Ea nu este valabilă pentru module, adică:

$$\sum_{k \in q} I_k \neq 0. \tag{15.137}$$

b) A doua teoremă a lui Kirchhoff se referă la ochiuri de rețea (fig. 15.26). Considerînd latura k a unui

ochi de rețea, legea lui Ohm (relația 15.131) se scrie:

$$\underline{E}_k + \underline{U}_k = \underline{Z}_{kk}\underline{I}_k + j\omega\underline{\Phi}_k^{(ex)}, \tag{15.138}$$

în care Z_{kk} este impedanța proprie a laturii, dată de relația:

$$\underline{Z}_{kk} = R_k + j\left(\omega L_{kk} - \frac{1}{C_k\omega}\right). \tag{15.139}$$

Fluxul magnetic, datorită cuplajului existent între latura k și alte laturi, se poate scrie, în circuite liniare (vezi relația 14.9):

$$\Phi_k^{(ex)} = \sum_{k\neq j} L_{kj} \cdot i_j, \tag{15.140}$$

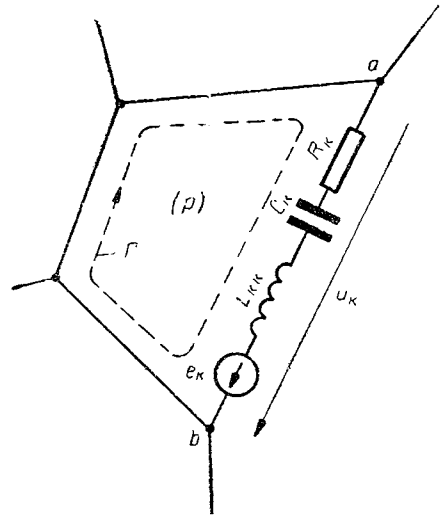


Fig. 15.26

sau în complex:

$$\underline{\Phi}_k^{(ex)} = \sum_{k\neq j} L_{kj} \cdot \underline{I}_j. \tag{15.141}$$

Introducînd (15.141) în (15.138), avem:

$$\underline{E}_k + \underline{U}_k = \underline{Z}_{kk} \cdot \underline{I}_k + j\omega \sum_{k\neq j} L_{kj} \cdot \underline{I}_j. \tag{15.142}$$

Dacă se notează impedanța de cuplaj:

$$\underline{Z}_{kj} = j\omega L_{kj}, \tag{15.143}$$

legea lui Ohm se mai scrie sub forma:

$$\underline{E}_k + \underline{U}_k = \underline{Z}_{kk}\underline{I}_k + \sum_{k\neq j} \underline{Z}_{kj}\underline{I}_j. \tag{15.144}$$

Efectuînd sumarea tuturor relațiilor de forma (15.144) în lungul conturului Γ al unui ochi (p) de rețea și ținînd cont că:

$$\sum_{k\in p} \underline{U}_k = 0, \tag{15.145}$$

se obține:

$$\sum_{k\in p} \underline{E}_k = \sum_{k\in p} \left(\underline{Z}_{kk}\underline{I}_k + \sum_{k\neq j} \underline{Z}_{kj}\underline{I}_j\right). \tag{15.146}$$

Această relație reprezintă teorema a doua a lui Kirchhoff, conform căreia: *într-un ochi de rețea suma algebrică a imaginilor în complex ale tensiunilor electromotoare este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune complexe din acel circuit.*

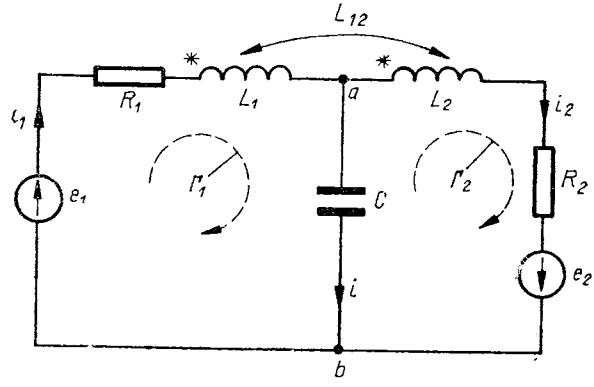


Fig. 15.27

În circuite necuplate ($L_{kj} = 0$) teorema a doua a lui Kirchhoff are aceeaşi formă ca şi în curent continuu:

$$\sum_{k \in p} \underline{E}_k = \sum_{k \in p} \underline{Z}_{kk} \underline{I}_k. \tag{15.147}$$

Exemplu

Scrierea teoremelor lui Kirchhoff corespunzătoare circuitului din figura 15.27.

Reţeaua conţine două noduri şi trei laturi ($N = 2$; $L = 3$).

Prima teoremă a lui Kirchhoff (aplicată pentru $N - 1$ noduri), ne dă în complex:

$$\underline{I}_1 - \underline{I} - \underline{I}_2 = 0. \tag{15.148}$$

A doua teoremă, aplicată pentru $L - N + 1 = 2$ ochiuri, ne dă în complex (parcurgerea celor două ochiuri este indicată în figură):

$$(\Gamma_1): \underline{E}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\,\underline{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\,\underline{I} + j\omega L_{12}\underline{I}_2 \tag{15.149}$$

$$(\Gamma_2): \underline{E}_2 = (R_2 + j\omega L_2)\,\underline{I}_2 - \frac{1}{j\omega C}\,\underline{I} + j\omega L_{12}\underline{I}_1. \tag{15.150}$$

Relaţiile (15.148), (15.149) şi (15.150) rezolvă circuitul, dacă se cunosc parametrii R, L C şi mărimile $\underline{E}_1$ şi $\underline{E}_2$.

CAPITOLUL 16

IMPEDANȚE ECHIVALENTE

Dacă se consideră un circuit complicat care are numai două borne de acces cu exteriorul (acest circuit se numește dipol), se numește *impedanță echivalentă complexă* raportul dintre valoarea complexă a tensiunii la borne și valoarea complexă a curentului absorbit pe la una din borne, regula de asociere fiind cea de la receptoare (fig. 16.1):

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}. \tag{16.1}$$

Valoarea inversă a impedanței complexe echivalente este *admitanța echivalentă complexă*:

$$\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}. \tag{16.2}$$

16.1. IMPEDANȚA ECHIVALENTĂ A UNEI CONEXIUNI SERIE ÎN ABSENȚA CUPLAJULUI INDUCTIV (fig. 16.2)

La conectarea în serie a impedanțelor, suma căderilor de tensiune este egală cu tensiunea aplicată:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3. \tag{16.3}$$

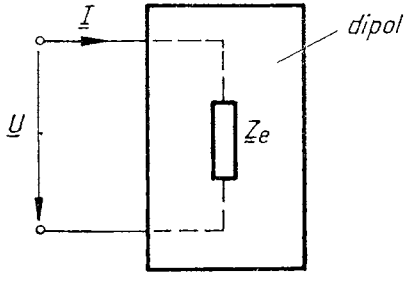


Fig. 16.1

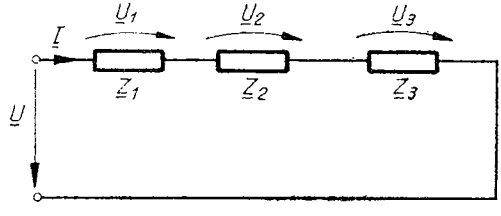


Fig. 16.2

Deoarece curentul este același în toate impedanțele, aplicînd legea lui Ohm pentru fiecare impedanță în parte, rezultă relațiile:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}; \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2\underline{I}; \quad \underline{U}_3 = \underline{Z}_3\underline{I}. \tag{16.4}$$

Introducînd apoi în (16.3):

$$\underline{U} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}, \tag{16.5}$$

se găsește impedanța echivalentă:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3. \tag{16.6}$$

Separînd părțile reale și imaginare, se obține rezistența echivalentă:

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 \tag{16.7}$$

și reactanța echivalentă:

$$X_e = X_1 + X_2 + X_3. \tag{16.8}$$

Relația (16.6) se poate reprezenta în planul complex (fig. 16.3), de unde se vede ușor că există inegalitatea între module:

$$Z_e \leqslant Z_1 + Z_2 + Z_3. \tag{16.9}$$

Inegalitatea devine egalitate numai în cazul particular cînd $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$.

Din (16.4) și (16.6) se pot deduce relațiile:

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_e} \cdot \underline{U}; \quad \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_e} \cdot \underline{U}; \quad \underline{U}_3 = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_e} \cdot \underline{U}, \tag{16.10}$$

care arată că la conectarea în serie, tensiunile la bornele impedanțelor se repartizează proporțional cu impedanțele respective.

16.2. IMPEDANȚA ECHIVALENTĂ A UNEI CONEXIUNI PARALEL ÎN ABSENȚA CUPLAJULUI INDUCTIV (fig. 16.4)

Curenții prin cele trei impedanțe satisfac teorema întîi a lui Kirchhoff:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3. \tag{16.11}$$

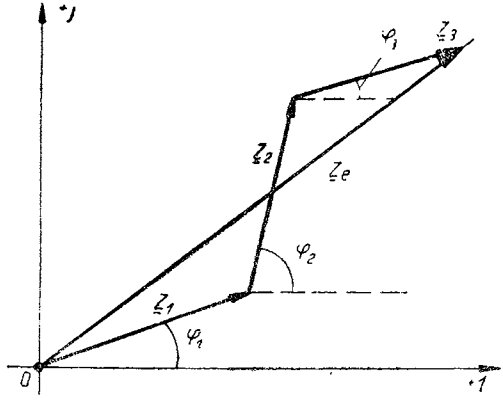


Fig. 16.3

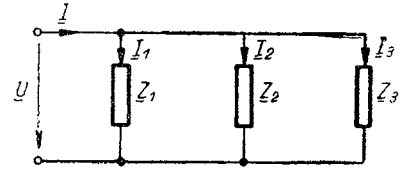


Fig. 16.4

Aplicînd legea lui Ohm pentru fiecare impedanţă în parte, deoarece tensiunea la bornele impedanţelor este aceeaşi, rezultă relaţiile:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} \; ; \; \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} \; ; \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3}, \tag{16.12}$$

care introduse în (16.11) conduc la:

$$\underline{I} = \underline{U}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}\right) = \underline{U}\,(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3). \tag{16.13}$$

Rezultă, cu (16.1) şi (16.2), impedanţa echivalentă complexă:

$$\underline{Z}_e = \frac{1}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3}}, \tag{16.14}$$

respectiv admitanţa echivalentă complexă:

$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3. \tag{16.15}$$

Separînd partea reală şi cea imaginară din (16.15), rezultă conductanţa echivalentă:

$$G_e = G_1 + G_2 + G_3 \tag{16.16}$$

şi susceptanţa echivalentă:

$$B_e = B_1 + B_2 + B_3. \tag{16.17}$$

Relaţia (16.15) se poate reprezenta în planul complex al admitanţei (fig. 16.5), de unde se deduce imediat inegalitatea modulelor:

$$Y_e \leqslant Y_1 + Y_2 + Y_3. \tag{16.18}$$

Ar exista egalitatea numai în cazul particular cînd

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3.$$

Din (16.12) şi (16.13) se poate deduce:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{I}}{\underline{Z}_1} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3}} = \underline{I}\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_e} \tag{16.19}$$

şi la fel pentru $\underline{I}_2$ şi $\underline{I}_3$.

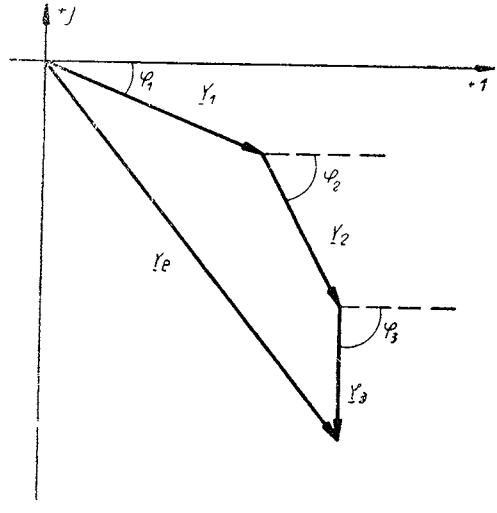


Fig. 16.5

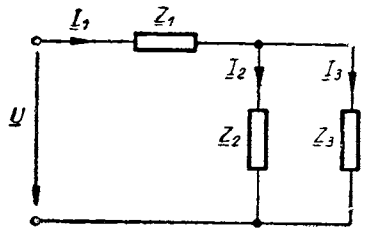


Fig. 16.6

16.3. CONEXIUNEA MIXTĂ A IMPEDANȚELOR NECUPLATE INDUCTIV (fig. 16.6)

Impedanțele $\underline{Z}_2$ și $\underline{Z}_3$ sînt conectate în paralel, deci impedanța lor echivalentă va fi, conform relației (16.14):

$$\underline{Z}_{2,3} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}. \quad (16.20)$$

Impedanța $\underline{Z}_{2,3}$ devine conectată în serie cu $\underline{Z}_1$, deci se obține impedanța echivalentă a schemei (conform relației 16.6):

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{2,3} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}. \quad (16.21)$$

Curentul $\underline{I}_1$ se calculează apoi cu relația:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{\underline{U}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3}. \quad (16.22)$$

Făcînd analogia cu (16.19) se poate obține pentru schema din figura 16.6:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U} \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{Z}_3}. \quad (16.23)$$

Relația (16.23) este deosebit de importantă. Conform acestei relații, curentul $\underline{I}_3$ nu depinde de valoarea impedanței $\underline{Z}_3$, dacă este îndeplinită condiția:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 0. \quad (16.24)$$

În acest caz relația (16.23) devine:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1}. \quad (16.25)$$

Pentru a fi satisfăcută condiția (16.24) e necesar să existe:

$$R_1 + R_2 = 0 \quad (16.26)$$

și

$$X_1 + X_2 = 0, \quad (16.27)$$

adică impedanța $\underline{Z}_1$ să fie o bobină ideală și impedanța $\underline{Z}_2$ să fie un condensator ideal sau invers, și în plus să existe relația:

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}, \quad (16.28)$$

care după cum se va vedea în capitolul următor reprezintă condiția de rezonanță.

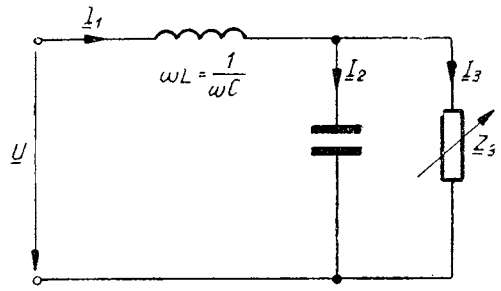


Fig. 16.7

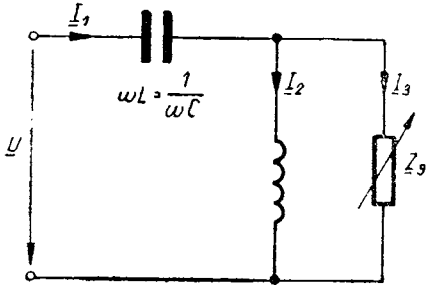


Fig. 16.8

Faţă de cele arătate mai sus, se pot imagina două scheme care se bucură de proprietatea că debitează un curent constant $\underline{I}_3$ printr-o impedanţă $\underline{Z}_3$, indiferent de valoarea acesteia din urmă.

Schemele sînt date în figurile 16.7 şi 16.8 şi ele sînt cunoscute sub numele de montaje de tip Boucherot.

Curentul $\underline{I}_3$, debitat în cazul primei scheme, este conform relaţiei (16.25):

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{j\omega L} = -j\frac{\underline{U}}{\omega L}, \tag{16.29}$$

iar în cazul celei de a doua scheme este:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C\,\underline{U}. \tag{16.30}$$

Deoarece $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, relaţiile (16.29) şi (16.30) se pot scrie:

$$\underline{I}_3 = \pm j\omega C\,\underline{U}. \tag{16.31}$$

16.4. IMPEDANŢA ECHIVALENTĂ A CIRCUITELOR CUPLATE INDUCTIV

16.4.1. Circuit serie cu cuplaj inductiv (fig. 16.9)

Cele două bobine sînt caracterizate prin rezistenţele proprii r_1 şi r_2, inductivităţile proprii L_1, L_2 şi inductivitatea de cuplaj M. Coeficientul de cuplaj este:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \leqslant 1. \tag{16.32}$$

Aplicînd legea lui Ohm, tensiunile la bornele bobinelor sînt date de relaţiile:

$$\underline{U}_1 = r_1\underline{I} + j\omega L_1\,\underline{I} + j\omega M\,\underline{I} \tag{16.33}$$

$$\underline{U}_2 = r_2\,\underline{I} + j\omega L_2 I + j\omega M\,\underline{I} \tag{16.34}$$

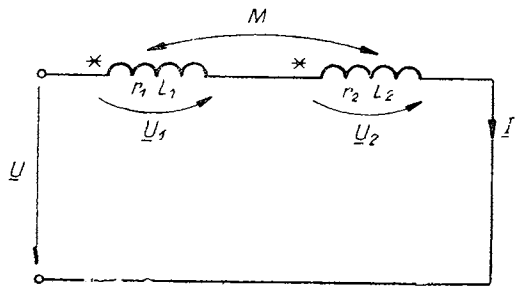


Fig. 16.9

Tensiunea la bornele circuitului se obține prin sumarea relațiilor (16.33) și (16.34):

$$\underline{U} = \underline{I}[(r_1 + r_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)]. \tag{16.35}$$

Conform relației (16.1), impedanța echivalentă este:

$$\underline{Z}_e = (r_1 + r_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M), \tag{16.36}$$

de unde, rezistența echivalentă este:

$$R_e = r_1 + r_2, \tag{16.37}$$

iar inductivitatea echivalentă este:

$$L_e = L_1 + L_2 + 2M. \tag{16.38}$$

Dacă se schimbă semnul cuplajului prin inversarea legăturilor la bornele unei singure bobine ($M < 0$) inductivitatea echivalentă devine:

$$L'_e = L_1 + L_2 - 2M. \tag{16.39}$$

Se poate arăta că indiferent de semnul cuplajului, inductivitatea echivalentă este întotdeauna o mărime pozitivă. Folosind inegalitatea:

$$(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 \geqslant 0, \tag{16.40}$$

se obține:

$$L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} \geqslant 0,$$

iar cu (16.32), rezultă cu atît mai mult:

$$L_1 + L_2 - 2M \geqslant 0, \text{ deci } L'_e \geqslant 0. \tag{16.41}$$

Scăzînd relațiile (16.38) și (16.39), se obține:

$$M = \frac{L_e - L'_e}{4}. \tag{16.42}$$

Această relație arată că se poate determina valoarea inductivității de cuplaj M, dacă se măsoară inductivitățile echivalente în cazul cuplării adiționale și diferențiale a două bobine.

16.4.2. Transferul de putere în circuite cuplate inductiv

Aplicînd legea lui Ohm, circuitului din figura 16.10, se obțin relațiile:

$$\underline{U} = (r_1 + j\omega L_1)\,\underline{I}_1 + j\omega M\,\underline{I}_2 \tag{16.43}$$

$$\underline{U} = (r_2 + j\omega L_2)\,\underline{I}_2 + j\omega M\underline{I}_1 \tag{16.44}$$

Rezolvînd sistemul, se obţin valorile curenţilor sub forma complexă:

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\gamma_1} \qquad (16.45)$$

$$\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\gamma_2} \qquad (16.46)$$

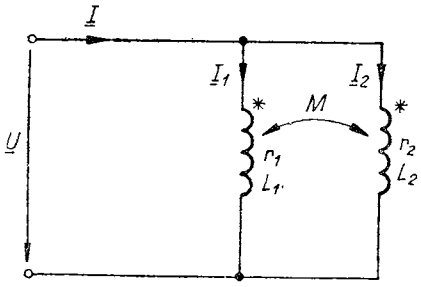


Fig. 16.10

Puterea complexă a primei ramuri se calculează cu relaţia:

$$\underline{S}_1 = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* = (r_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 \cdot \underline{I}_1^* + j\omega M \underline{I}_2 \underline{I}_1^*. \qquad (16.47)$$

Ţinînd cont că $\underline{I}_1 \cdot \underline{I}_1^* = I_1^2$ şi notînd

$$\theta = \gamma_1 - \gamma_2, \qquad (16.48)$$

relaţia (16.47) se scrie:

$$\underline{S}_1 = r_1 I_1^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega M I_1 I_2 \cdot e^{-j\theta},$$

sau dezvoltînd exponenţiala, rezultă:

$$\underline{S}_1 = r_1 I_1^2 + \omega M I_1 I_2 \sin\theta + j(\omega L_1 I_1^2 + \omega M I_1 I_2 \cos\theta). \qquad (16.49)$$

Partea reală a puterii aparente complexe este tocmai puterea activă:

$$P_1 = r_1 I_1^2 + \omega M I_1 I_2 \sin\theta. \qquad (16.50)$$

În mod similar se deduce şi puterea activă consumată în a doua ramură a circuitului:

$$P_2 = r_2 I_2^2 - \omega M I_1 I_2 \sin\theta. \qquad (16.51)$$

Relaţiile (16.50) şi (16.51) arată că puterea pe o ramură a unui circuit cuplat nu se consumă numai pe rezistenţa activă, ci există un transfer de putere între ramurile cuplate. Expresia puterii transferate este:

$$P_{tr} = \omega M I_1 I_2 \sin\theta. \qquad (16.52)$$

După cum se poate vedea, ea dispare de pe o ramură şi se regăseşte integral în cealaltă ramură. Puterea transferată e cu atît mai mare cu cît unghiul de defazaj θ între cei doi curenţi este mai aproape de $\frac{\pi}{2}$.

16.5. LINIA MONOFAZATĂ SCURTĂ ÎN CURENT ALTERNATIV

Dacă linia electrică de transport a energiei (fig. 16.11, *a*) care leagă generatorul de receptor este scurtă, ea poate fi înlocuită cu o schemă echivalentă *R*, *L* serie (fig. 16.11, *b*). Impedanţa interioară a generatorului ($\underline{Z}_i$) este inclusă în impedanţa echivalentă ($\underline{Z}_e = R_e + jX_e$).

Studiul liniei scurte se reduce deci la studiul unui circuit serie $\underline{Z}_e$, $\underline{Z}_2$, alimentat de tensiunea electromotoare $\underline{E}$.

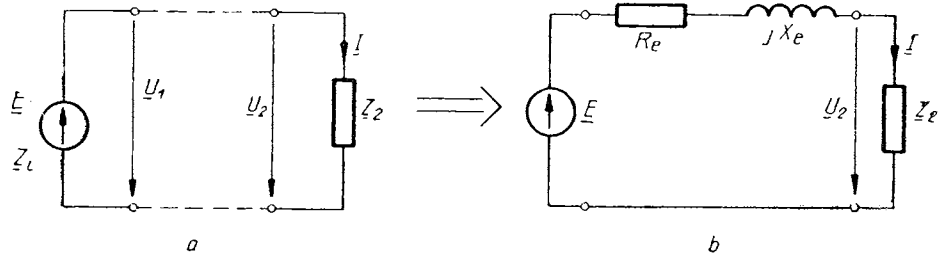


Fig. 16.11

În practică se cunoaşte tensiunea $\underline{U}_2$ şi impedanţa $\underline{Z}_2$ (deci şi curentul $\underline{I}_2 = \underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}$).

Se pune problema de a găsi o relaţie între tensiunea electromotoare $\underline{E}$ a generatorului şi tensiunea de la bornele receptorului $\underline{U}_2$.

Se numeşte *pierdere de tensiune* diferenţa valorilor efective:

$$\delta U = E - U_2. \tag{16.53}$$

Această pierdere de tensiune poate fi uneori negativă (în cazuri rare), adică tensiunea la bornele receptorului este mai mare decît tensiunea la bornele generatorului.

Diferenţa tensiunilor în complex:

$$\Delta \underline{U} = \underline{E} - \underline{U}_2 \tag{16.54}$$

se numeşte *cădere de tensiune* pe linie.

Aplicînd legea lui Ohm pentru schema echivalentă din figura 16.11, *b*, se obţine relaţia:

$$\underline{E} = (\underline{Z}_2 + R_e + jX_e)\,\underline{I} = \underline{U}_2 + (R_e + jX_e)\underline{I} = \underline{U}_2 + \Delta \underline{U}. \tag{16.55}$$

Această relaţie corespunde reprezentării fazoriale din figura 16.12, în care s-a ales drept origine de fază tensiunea $\underline{U}_2$, curentul $\underline{I}$ fiind defazat în urma acesteia cu unghiul φ_2, dat de impedanţa $\underline{Z}_2$.

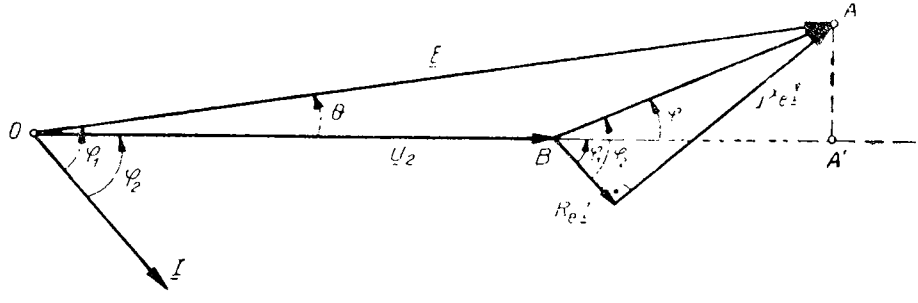


Fig. 16.12

Conform relațiilor (16.52) și (16.54), rezultă:

$$\delta U \approx BA' \tag{16.56}$$

$$|\Delta \underline{U}| = BA. \tag{16.57}$$

Din figura 16.12 se pot deduce imediat relațiile:

$$\delta U = R_e I \cos \varphi_2 + X_e I \sin \varphi_2 \tag{16.58}$$

$$E = \sqrt{(U_2 + \delta U)^2 + I^2 (X_e \cos \varphi_2 - R_e \sin \varphi_2)^2} \tag{16.59}$$

$$|\Delta \underline{U}| = I \sqrt{R_e^2 + X_e^2} \tag{16.60}$$

$$|\Delta U| > \delta U. \tag{16.61}$$

Ținînd cont de expresiile puterilor active și reactive consumate de receptor, relația (16.58) se mai poate scrie:

$$\delta U = \frac{R_e \cdot P_2 + X_e \cdot Q_2}{U_2}. \tag{16.62}$$

Pierderea de tensiune procentuală va fi:

$$\varepsilon_{\%} = \frac{\delta U}{U_2} \cdot 100 = 100 \frac{R_e P_2 + X_e Q_2}{U_2^2}.$$

În practică această pierdere de tensiune nu trebuie să depășească $3 \div 4$ procente.

Observație

Conform relației (16.62), pierderea de tensiune poate fi negativă ($U_2 > E$) dacă există inegalitatea:

$$R_e P_2 + X_e Q_2 < 0,$$

sau

$$\operatorname{tg} \varphi_2 < -\frac{R_e}{X_e}, \tag{16.64}$$

ceea ce se poate realiza pentru receptoare capacitive.

16.6. CONDENSATORUL CU PIERDERI

Un condensator ideal (fără pierderi) se bucură de proprietatea că energia activă consumată în curent alternativ este nulă, ceea ce înseamnă că curentul din condensator este defazat cu 90° înaintea tensiunii aplicate la borne. Un condensator real (cu pierderi) consumă energie activă în curent alternativ (fapt atestat prin aceea că un condensator real conectat la o sursă de curent alternativ se încălzește după un timp), deci defazajul dintre tensiune și curent este mai mic decît 90°. Diagrama fazorială a condensatorului cu pierderi este dată în figura 16.13. Diferența de defazaj pînă la 90° se numește *unghi de pierderi* al condensatorului și se notează cu δ. Pierderile din condensator

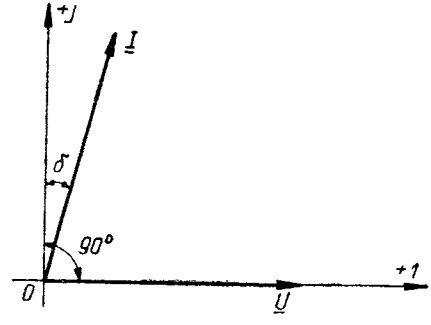


Fig. 16.13

se datoresc pe de o parte imperfecțiunii dielectricului (există „scurgeri" de curent între armături chiar la o alimentare a condensatorului în curent continuu), iar pe de altă parte proceselor de polarizare ciclică a dielectricului. Evident, un condensator cu vid nu poate avea pierderi, el fiind deci un condensator ideal. De obicei, în practică unghiul de pierderi în condensatoare este destul de mic, de ordinul gradelor sau al minutelor (unghiul de pierderi depinde și de frecvența la care lucrează condensatorul).

Problemele care interesează în studiul condensatorului cu pierderi sînt legate atît de studiul pierderilor în dielectric, cît și de schemele echivalente ale condensatorului cu pierderi.

Curentul care circulă prin condensator în regim nestaționar este:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \tag{16.65}$$

iar în regim sinusoidal, în complex este:

$$\underline{I} = j\omega \underline{Q}. \tag{16.66}$$

Avînd în vedere relațiile,

$$q = \oint_{\Sigma} \overline{D} \cdot \overline{dA} \quad \text{și} \quad u = \int_{(1)}^{(2)} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s}, \tag{16.67}$$

unde Σ este suprafața închisă care îmbrățișează strîns o armătură a condensatorului, iar (1) și (2) constituie armăturile condensatorului, rezultă că fazorii reprezentativi pentru q și D sînt în fază (conform relației 16.66 sînt ortogonali față de fazorul curentului $\underline{I}$), de asemenea fazorii reprezentativi pentru u și E sînt în fază.

În figura 16.14 sînt reprezentați fazorii $\underline{I}$, $\underline{U}$, $\underline{Q}$, $\underline{D}_m$ și $\underline{E}_m$ (mărimile D și E nu au simbolizarea valorilor instantanee prin litere mici) din care se deduce că intensitatea cîmpului electric E este în avans cu unghiul de pierderi δ față de inducția electrică D. Din diagrama fazorială rezultă scrierea în valori instantanee a mărimilor E și D:

$$E = E_m \sin \omega t \quad \text{și} \quad D = D_m \sin(\omega t - \delta), \tag{16.68}$$

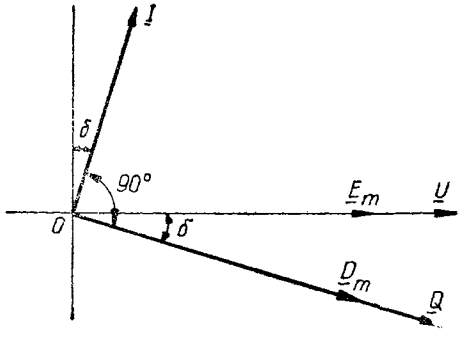


Fig. 16.14

iar în complex:

$$\underline{E}_m = E_m \quad \text{și} \quad \underline{D}_m = D_m \, \mathrm{e}^{-j\delta}. \tag{16.69}$$

Relațiile (16.68) reprezintă ecuațiile parametrice ale curbei $D = f(E)$, curbă care se obține eliminînd timpul din (16.68), adică:

$$\frac{E^2}{E_m^2} + \frac{D^2}{D_m^2} - 2\frac{ED}{E_m D_m}\cos\delta = \sin^2\delta. \tag{16.70}$$

Relația (16.70) reprezintă ecuația unei elipse, care este reprezentată în figura 16.15.

Energia ce se pierde în unitatea de volum a dielectricului într-o perioadă a tensiunii alternative aplicate condensatorului (într-un ciclu) este egală cu aria elipsei de pierderi și are expresia:

$$W'_e = \oint_\Gamma \overline{E} \cdot \mathrm{d}\overline{D}, \qquad (16.71)$$

unde Γ este conturul elipsei.

Efectuînd calculele în (16.71) cu (16.68), se obține în final:

$$W'_e = \pi E_m \cdot D_m \sin \delta. \qquad (16.72)$$

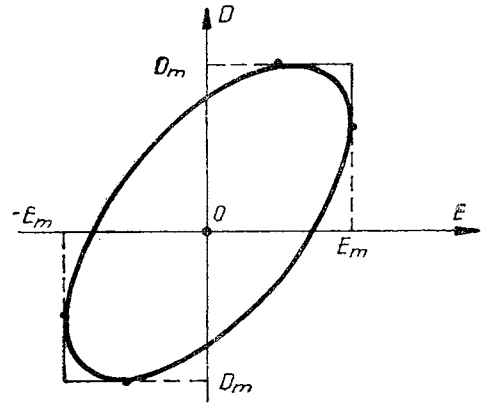


Fig. 16.15

Din relațiile (16.69) se poate defini în curent alternativ noțiunea de *permitivitate complexă* a unui dielectric cu pierderi:

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\underline{D}_m}{\underline{E}_m} = \frac{D_m}{E_m} e^{-j\delta} = \varepsilon_a \cos \delta - j\varepsilon_a \sin \delta = \varepsilon' - j\varepsilon'', \qquad (16.73)$$

unde ε_a se numește permitivitatea *de amplitudine* (definită prin raportul amplitudinilor mărimilor D și E: $\varepsilon_a = \frac{D_m}{E_m}$); ε' permitivitate *elastică*; ε'' permitivitate *vîscoasă* sau *de atenuare*.

Pierderile în dielectric sînt date numai de componenta ε'' a permitivității complexe. Într-adevăr expresia lui ε'' se poate pune sub forma:

$$\varepsilon'' = \frac{D_m}{E_m} \sin \delta, \qquad (16.74)$$

care introdusă în (16.72) determină pierderile în dielectric în unitatea de volum și într-un ciclu de variație a tensiunii la borne:

$$W'_e = \pi E_m^2 \varepsilon'', \qquad (16.75)$$

ca fiind proporționale cu pătratul amplitudinii cîmpului (amplitudinii tensiunii) și cu permitivitatea vîscoasă.

Schemele echivalente ale condensatorului cu pierderi pot fi deduse din diagrama fazorială.

Dacă se descompune curentul (fig. 16.13) în componentele $\underline{I}'$ și $\underline{I}''$, conform figurii 16.16, *a* și relației

$$\underline{I} = \underline{I}' + \underline{I}'', \qquad (16.76)$$

rezultă schema echivalentă tip paralel din figura 16.16, *b*, în care C_1 și R_1 sînt parametrii unor elemente ideale de circuit. Valorile parametrilor echi-

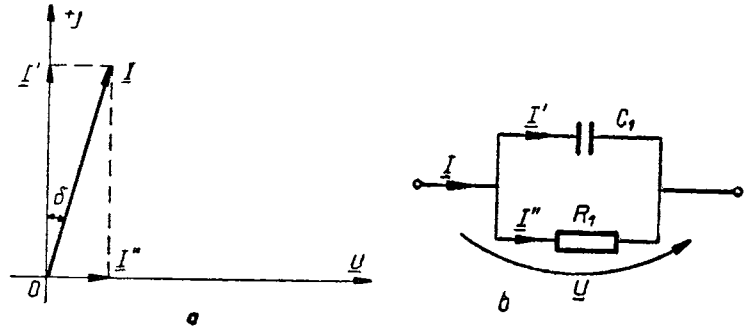


Fig. 16.16

valenți C_1 și R_1 se pot determina scriind modulele curenților $\underline{I}'$ și $\underline{I}''$ în diagrama fazorială și în circuitul echivalent. Din diagramă rezultă:

$$I' = I \cos \delta; \quad I'' = I \sin \delta, \tag{16.77}$$

iar din circuit rezultă:

$$I' = U \cdot C_1 \omega; \; I'' = \frac{U}{R_1}. \tag{16.78}$$

Din (16.77) și (16.78) se obțin:

$$C_1 = \frac{I}{\omega U} \cos \delta; \quad R_1 = \frac{U}{I \sin \delta}. \tag{16.79}$$

Considerînd în figura 16.13 curentul ca origine de fază și descompunînd tensiunea în componentele $\underline{U}'$ și $\underline{U}''$ (fig. 16.17, *a*), se obține schema echivalentă tip serie din figura 16.17, *b*, conform relației:

$$\underline{U} = \underline{U}' + \underline{U}''. \tag{16.80}$$

Valorile parametrilor ideali C_2, R_2 se pot determina scriind din diagrama fazorială relațiile:

$$U' = U \cos \delta \quad \text{și} \quad U'' = U \sin \delta, \tag{16.81}$$

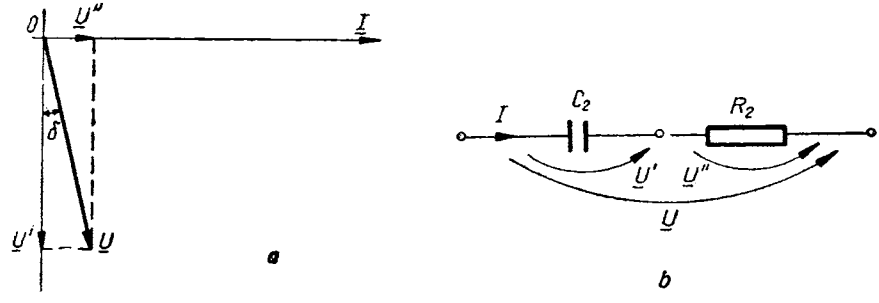


Fig. 16.17

iar în schema echivalentă relațiile:

$$U' = I\frac{1}{\omega C_2} \text{ și } U'' = IR_2. \tag{16.82}$$

Din (16.81) și (16.82) se deduc

$$C_2 = \frac{I}{\omega U \cos \delta}; \quad R_2 = \frac{U}{I} \sin \delta. \tag{16.83}$$

Între parametrii celor două scheme echivalente există relațiile:

$$C_1 = C_2 \cos^2 \delta; \quad R_1 = \frac{R_2}{\sin^2 \delta}. \tag{16.84}$$

Deoarece în practică unghiul de pierderi δ este destul de mic (de ordinul gradelor), din (16.84) se observă că $C_1 \approx C_2$, dar $R_1 \gg R_2$.

În studiul circuitelor ce conțin condensatoare cu pierderi se utilizează mai des schema echivalentă tip paralel (fig. 16.16).

16.7. BOBINA CU PIERDERI

Bobina ideală (fără pierderi) se bucură de proprietatea că nu consumă energie activă în curent alternativ, deci în diagrama fazorială tensiunea la bornele bobinei este defazată cu 90° înaintea curentului care străbate bobina. Bobina reală (cu pierderi) consumă energie activă în curent alternativ, deci unghiul de defazaj φ între tensiune și curent este mai mic decît 90°. Complementul acestui unghi se numește *unghi de pierderi al bobinei* $\delta_{Fe}(\delta_{Fe} = 90° - \varphi)$.

Pierderile în bobinele reale sînt mult mai mari decît în condensatoarele reale. Ele se datoresc mai multor cauze: pierderi prin histerezis (în cazul materialelor feromagnetice), pierderi prin curenți turbionari în tolele miezului bobinei, pierderi datorită proceselor de magnetizare ciclică a miezului. Evident, o bobină fără miez magnetic (în vid) și cu o înfășurare supraconductoare este o bobină ideală.

Dacă se consideră o bobină avînd rezistența înfășurării neglijabilă (deci se iau în considerație numai pierderile din miez), tensiunea la borne se scrie:

$$u = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{16.85}$$

unde N este numărul de spire al înfășurării, iar Φ este fluxul magnetic din miez. În regim sinusoidal, în complex, (16.85) se scrie:

$$\underline{U} = \mathrm{j}\omega N \underline{\Phi}. \tag{16.86}$$

Avînd în vedere relațiile

$$\Phi = \int_S \overline{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A} \quad \text{și} \quad Ni = \oint_\Gamma \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}s}, \tag{16.87}$$

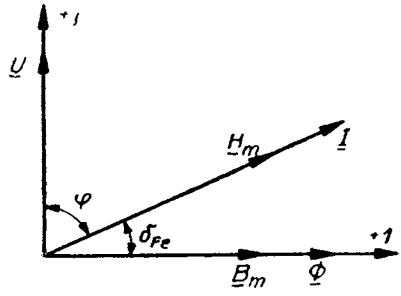


Fig. 16.18

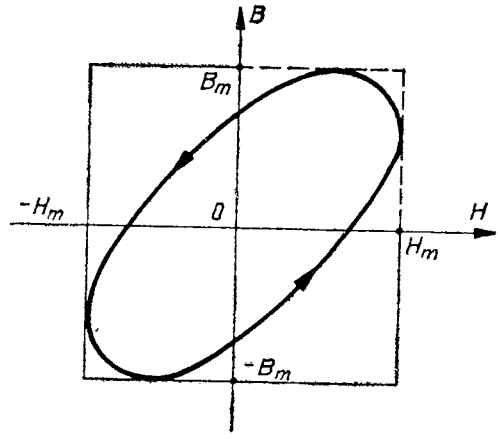


Fig. 16.19

în care S reprezintă secțiunea miezului, iar Γ este lungimea circuitului magnetic, rezultă că perechile de fazori $\underline{\Phi}$, $\underline{B}_m$ și respectiv $\underline{I}$ și $\underline{H}_m$ sînt sinfazici.

În figura 16.18 sînt reprezentați fazorii $\underline{U}$, $\underline{I}$, $\underline{H}_m$, $\underline{B}_m$ și $\underline{\Phi}$, punîndu-se în evidență atît defazajul φ între tensiune și curent, cît și unghiul de pierderi în miez al bobinei, δ_{Fe}.

Din diagrama fazorială rezultă scrierea în valori instantanee a mărimilor B și H:

$$B = B_m \sin \omega t \quad \text{și} \quad H = H_m \sin(\omega t + \delta_{Fe}), \tag{16.88}$$

iar în complex:

$$\underline{B}_m = B_m \text{ și } \underline{H}_m = H_m e^{j\delta Fe}. \tag{16.89}$$

Relațiile (16.88) reprezintă ecuațiile parametrice ale curbei $B = f(H)$, curbă care se obține eliminînd timpul din (16.88). Rezultă:

$$\frac{H^2}{H_m^2} + \frac{B^2}{B_m^2} - 2\frac{HB}{B_m H_m}\cos \delta_{Fe} = \sin^2 \delta_{Fe}, \tag{16.90}$$

adică ecuația unei elipse, reprezentată în figura 16.19. Energia care se pierde în unitatea de volum a miezului, în timpul unui ciclu de variație a tensiunii aplicate la bornele bobinei, reprezintă aria elipsei de pierderi și este:

$$W'_m = \oint_\Gamma \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}B}, \tag{16.91}$$

unde Γ este conturul elipsei. Efectuînd calculele în (16.91), cu (16.88), se obține în final:

$$W'_m = \pi H_m B_m \sin \delta_{Fe}. \tag{16.92}$$

Din relaţiile (16.89) se defineşte în curent alternativ noţiunea de *permeabilitate complexă* a miezului:

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{B}_m}{\underline{H}_m} = \frac{B_m}{H_m} e^{-j\delta Fe} = \mu_a \cos \delta_{Fe} - j\mu_a \sin \delta_{Fe} = \mu' - j\mu'', \qquad (16.93)$$

unde μ_a se numeşte *permeabilitate de amplitudine* (dată de raportul amplitudinilor mărimilor B şi H: $\mu_a = \frac{B_m}{H_m}$) ; μ' permeabilitate *elastică*, iar μ'' permeabilitate *vîscoasă*.

Pierderile în miez sînt date numai de permeabilitatea vîscoasă μ''. Într-adevăr, permeabilitatea vîscoasă fiind $\mu'' = \frac{B_m}{H_m} \sin \delta_{Fe}$, rezultă că (16.92) se poate scrie:

$$W'_m = \pi H_m^2 \cdot \mu''. \qquad (16.94)$$

Schemele echivalente ale bobinei cu pierderi se pot stabili din diagrama fazorială. Se consideră mai întîi curentul $\underline{I}$ ca origine de fază şi se descompune tensiunea $\underline{U}$ în componentele $\underline{U}'$ şi $\underline{U}''$ (fig. 16.20, *a*), care satisfac relaţia:

$$\underline{U} = \underline{U}' + \underline{U}''. \qquad (16.95)$$

Relaţiei (16.95) îi corespunde schema echivalentă serie cu elementele ideale L_1 şi R_1 (fig. 16.20, *b*). Din diagrama fazorială rezultă relaţiile:

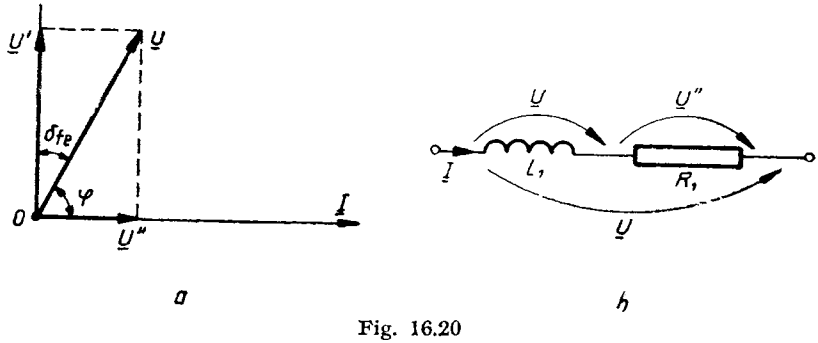
$$U' = U \cos \delta_{Fe} \text{ şi } U'' = U \sin \delta_{Fe}, \qquad (16.96)$$

iar din circuitul echivalent:

$$U' = \omega L_1 \cdot I \qquad \text{şi} \qquad U'' = R_1 \cdot I. \qquad (16.97)$$

Din (16.97) şi (16.96) se obţin valorile parametrilor echivalenţi:

$$I_1 = \frac{U}{\omega I} \cos \delta_{Fe} \text{ şi } R_1 = \frac{U}{I} \sin \delta_{Fe}. \qquad (16.98)$$



a *b*

Fig. 16.20

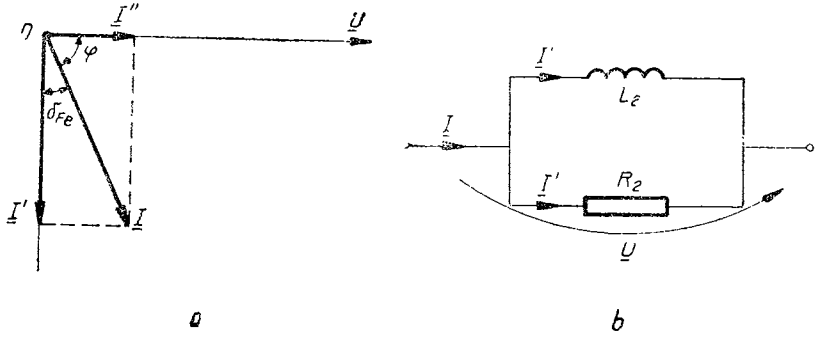


Fig. 16.21

Procedînd în mod analog, considerînd tensiunea $\underline{U}$ ca origine de fază (fig. 16.21, *a*) se obține schema echivalentă *paralel* (fig. 16.21, *b*), în care parametrii echivalenți au valorile:

$$L_2 = \frac{U}{\omega I} \cdot \frac{1}{\cos \delta_{Fe}} \quad \text{și} \quad R_2 = \frac{U}{I} \cdot \frac{1}{\sin \delta_{Fe}}. \tag{16.99}$$

Între parametrii celor două scheme echivalente se pot stabili relațiile:

$$L_1 = L_2 \cos^2 \delta_{Fe} \quad \text{și} \quad R_1 = R_2 \sin^2 \delta_{Fe}. \tag{16.100}$$

În practică se obișnuiește a se lucra mai mult cu schema echivalentă tip *serie* a bobinei cu pierderi (fig. 16.20).

CAPITOLUL 17

REZONANȚA ÎN CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV SINUSOIDAL

În circuitele electrice care conțin bobine și condensatoare, deoarece reactanța acestora se poate compensa reciproc, pot exista cazuri cînd reactanța totală echivalentă a întregului circuit este nulă, deși circuitul conține elemente reactive. Corespunzător cu acestea, unghiul de defazaj φ între tensiunea aplicată la borne și curentul care se stabilește în circuit este zero. De asemenea puterea reactivă ($Q = UI \sin \varphi$) consumată în circuit este nulă. Astfel de circuite se numesc *circuite rezonante.*

17.1. REZONANȚA SERIE (REZONANȚA TENSIUNILOR)

Considerînd (fig. 17.1) circuitul serie R, L, C, alimentat cu o tensiune sinusoidală, legea lui Ohm în complex se scrie:

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I}, \tag{17.1}$$

sau:

$$\underline{U} = \underline{I}\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]. \tag{17.2}$$

Așa cum s-a arătat mai sus, circuitul este rezonant dacă este îndeplinită condiția:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \tag{17.3}$$

adică:

$$\omega^2 LC = 1. \tag{17.4}$$

Această relație arată că în circuit se poate realiza rezonanța prin variația următorilor parametri: pulsația ω, inductivitatea L, sau capacitatea C. Valoarea pulsației pentru care se produce rezonanța se notează cu ω_0 și ea se deduce din (17.4):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{17.5}$$

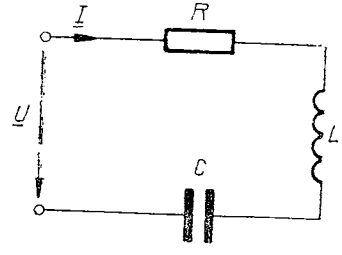


Fig. 17.1

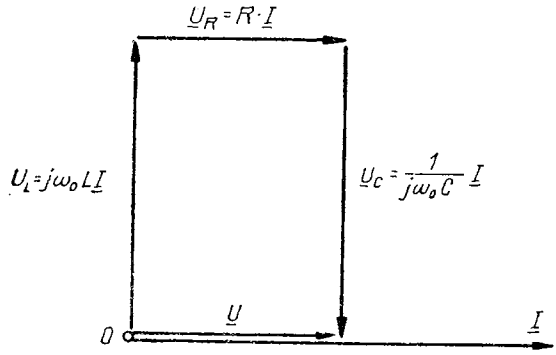


Fig. 17.2

Din relația (17.2) se obține curentul sub forma:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{17.6}$$

în care radicalul de la numitor este impedanța circuitului.

La rezonanță (vezi 17.3) impedanța circuitului are valoarea minimă și este egală chiar cu rezistența R. Corespunzător cu aceasta curentul (17.6) va avea valoarea maximă la rezonanță. Diagrama fazorială a circuitului rezonant conform relației (17.1) este dată în figura 17.2, unde s-a luat curentul ca origine de fază. Din dreptunghiul format afstfel, se deduc relațiile:

$$U_C = U_L \tag{17.7}$$
$$U_R = U. \tag{17.8}$$

Se poate întîmpla ca laturile verticale să fie mult mai mari decît cele orizontale, adică să existe inegalitatea:

$$U_L = U_C > U. \tag{17.9}$$

În acest caz se spune că în circuit apar supratensiuni (tensiuni mai mari decît tensiunea de alimentare) și din acest motiv rezonanța serie se numește rezonanța tensiunilor. Pot apare supratensiuni numai în circuitele în care

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} > R. \tag{17.10}$$

Ținînd cont de (17.5), relația (17.10) se mai scrie:

$$\sqrt{\frac{L}{C}} > R. \tag{17.11}$$

Termenul $\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ are dimensiunea unei impedanțe și se numește *impedanță caracteristică*.

Raportul

$$\frac{\rho}{R} = q \tag{17.12}$$

se numește *factor de calitate*, iar inversul său

$$\frac{R}{\rho} = \frac{1}{q} = d \tag{17.13}$$

se numește *factor de amortizare* al circuitului.

Se poate constata ușor că, din punct de vedere fizic impedanța caracteristică este raportul dintre tensiunea la bornele bobinei sau condensatorului și curentul din circuit la rezonanță. De asemenea, factorul de amortizare este egal cu raportul dintre tensiunea aplicată la bornele întregului circuit și tensiunea la bornele bobinei sau condensatorului la rezonanță.

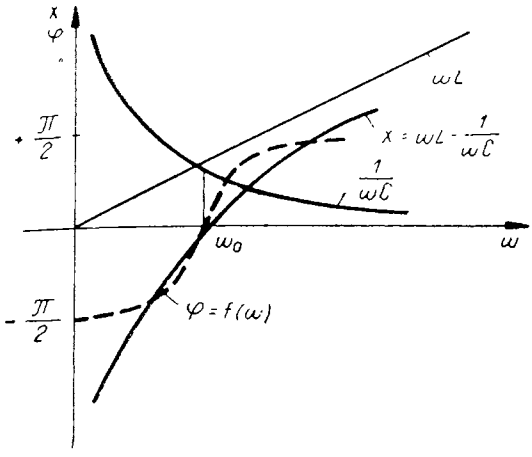


Fig. 17.3

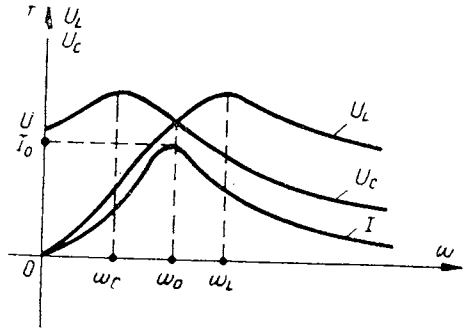


Fig. 17.4

Reactanța circuitului fiind:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \tag{17.14}$$

iar defazajul între tensiune și curent fiind:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}, \tag{17.15}$$

în figura 17.3 sînt reprezentate acestea în funcție de pulsația ω.

Așa cum rezultă din această reprezentare, pentru valori ale pulsației mai mici decît pulsația de rezonanță ω_0, reactanța circuitului este negativă (circuitul se comportă capacitiv), iar pentru pulsații mai mari decît pulsația de rezonanță circuitul se comportă inductiv.

Utilizînd relația (17.6), tensiunile la bornele bobinei și ale condensatorului sînt date de expresiile:

$$U_L = \omega L I = \frac{\omega L\, U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{17.16}$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{17.17}$$

În figura 17.4 sînt reprezentate funcțiile $I = I(\omega)$; $U_L = U_L(\omega)$ și $U_C = U_C(\omega)$, conform relațiilor (17.6), (17.16) și (17.17).

Curentul trece printr-un maxim la rezonanță ($\omega = \omega_0$), cînd valoarea sa este

$$I_0 = \frac{U}{R}. \tag{17.18}$$

Tensiunea la bornele condensatorului are valoarea U, la $\omega = 0$, și trece printr-un maxim la o pulsație, $\omega = \omega_C$, care poate fi dedusă din (17.17) prin anularea derivatei în raport cu ω, obținîndu-se:

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2 - d^2}{2}}, \tag{17.19}$$

unde ω_0 este dat de (17.5), iar d este dat de (17.13).

Tensiunea la bornele bobinei pleacă din zero și atinge un maxim pentru $\omega = \omega_L$, care satisface relația:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2 - d^2}}. \tag{17.20}$$

La rezonanță cele două tensiuni sînt egale și satisfac relația:

$$U_L = U_C = \frac{U}{d}. \tag{17.21}$$

Din relațiile (17.19) și (17.20) se constată ușor că cele două tensiuni (U_L și U_C) nu prezintă maxime dacă $d > \sqrt{2}$. În acest caz, curba $U_C = U_C(\omega)$ scade monoton de la valoarea U la zero, iar curba $U_L = U_L(\omega)$ crește monoton de la zero la U.

17.2. REZONANȚA PARALEL (REZONANȚA CURENȚILOR)

Considerînd circuitul paralel (fig. 17.5) format din elementele ideale R, L, C, alimentat cu o tensiune sinusoidală, teorema întîi a lui Kirchhoff conduce la relația:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C, \tag{17.22}$$

sau explicitat:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{j\omega L} + j\omega \underline{U} C, \tag{17.23}$$

sau încă

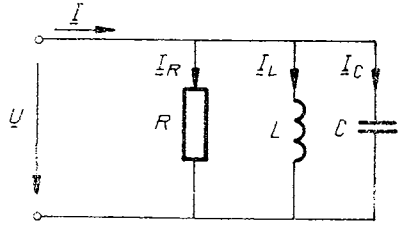


Fig. 17.5

$$\underline{I} = \underline{U}\left[\frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right] \tag{17.24}$$

Există rezonanță în circuit cînd unghiul de defazaj între tensiune și curent este zero, adică avem relația:

$$\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0, \tag{17.25}$$

de unde:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{17.26}$$

adică, rezonanța paralel în circuite ideale se produce în aceleași condiții ca și în rezonanța serie (vezi relația 17.5).

Curentul din circuit (relația 17.24) este:

$$I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}, \tag{17.27}$$

unde radicalul reprezintă admitanța circuitului.

Se constată ușor că la rezonanță curentul absorbit de la rețea este minim $\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0\right)$ și are valoarea:

$$I_0 = \frac{U}{R}. \tag{17.28}$$

Diagrama fazorială a circuitului rezonant conform relației (17.23) este construită în figura 17.6, unde s-a luat ca origine de fază tensiunea U.

Din figură se pot deduce relațiile:

$$I_C = I_L \tag{17.29}$$

$$I_R = I. \tag{17.30}$$

Cînd laturile verticale ale dreptunghiului sînt mai mari decît laturile orizontale,

$$I_C = I_L > I, \tag{17.31}$$

în elementele reactive ale circuitului apar supracurenți (curenți mai mari decît cel absorbit de la rețea) și din acest motiv rezonanța paralel se numește rezonanța curenților. Apar supracurenți în circuitele în care există inegalitatea:

$$C\omega_0 = \frac{1}{L\omega_0} > \frac{1}{R}, \tag{17.32}$$

sau:

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} < R. \tag{17.33}$$

Ca și la rezonanța serie, se introduc noțiunile de admitanță caracteristică:

$$\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}} = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \tag{17.34}$$

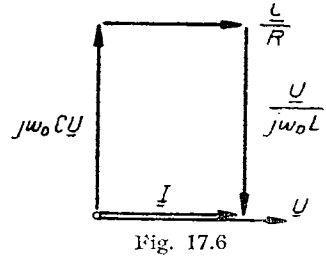


Fig. 17.6

și factor de calitate:

$$q = \gamma \cdot R. \tag{17.35}$$

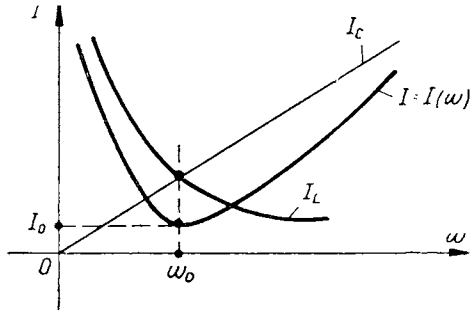


Fig. 17.7

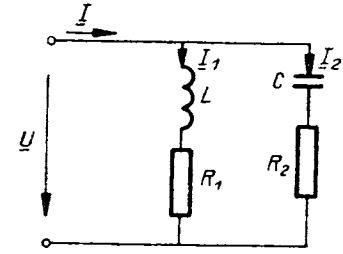


Fig. 17.8

Admitanța caracteristică este egală cu raportul dintre curentul din ramura inductivă sau capacitivă și tensiunea aplicată la borne, iar factorul de calitate $\left(d = \frac{1}{q}\right.$ se numește factor de amortizare) reprezintă raportul dintre curentul din ramura inductivă sau capacitivă și curentul absorbit de la rețea, la rezonanță.

În figura 17.7 este reprezentată variația curentului absorbit de la rețea în funcție de pulsația ω, după relația (17.27). De asemenea sînt reprezentați și curenții care circulă prin elementele reactive:

$$I_C = \omega C U \text{ și } I_L = \frac{1}{\omega L} \cdot U. \tag{17.36}$$

Pentru valori ale pulsației mai mici decît ω_0 (pulsația de rezonanță), curentul prin bobină este mai mare decît curentul prin condensator, deci circuitul se comportă inductiv.

Pentru valori ale pulsației mai mari decît ω_0, curentul prin condensator este mai mare decît cel din bobină, deci circuitul se comportă capacitiv.

17.3. REZONANȚA LA CONECTAREA SERIE-PARALEL

Se consideră circuitul din figura 17.8, obținut prin conectarea în paralel a două circuite serie R, L și R, C. Dacă impedanțele complexe ale celor două ramuri sînt:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L \tag{17.37}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C}, \tag{17.38}$$

impedanța echivalentă a circuitului va fi:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(R_1 + j\omega L)\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C}\right)}{(R_1 + R_2) + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \tag{17.39}$$

După transformări simple se obține forma:

$$\underline{Z}_e = \frac{R_1^2 R_2 + R_2^2 R_1 + \omega^2 L^2 R_2 + \frac{R_1}{\omega^2 C^2}}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} + j \frac{\omega L R_2^2 + \frac{L}{\omega C^2} - \frac{R_1^2}{\omega C} - \frac{\omega L^2}{C}}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (17.40)$$

În circuitul considerat va exista rezonanță cînd reactanța echivalentă (coeficientul lui j din relația 17.40) se anulează, adică:

$$\omega L R_2^2 + \frac{L}{\omega C^2} - \frac{R_1^2}{\omega C} - \frac{\omega L^2}{C} = 0. \quad (17.41)$$

Rezolvînd această ecuație, se obține pulsația de rezonanță:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}. \quad (17.42)$$

Această expresie arată că în circuitul considerat, pulsația de rezonanță depinde și de rezistențele R_1 și R_2 din circuit, spre deosebire de rezonanța din circuitele ideale (par. 17.1 și 17.2), unde pulsația de rezonanță era funcție numai de parametrii L și C.

Observații

a) Cînd rezistențele R_1 și R_2 sînt egale (sau cînd sînt nule) pulsația de rezonanță este egală cu pulsația de rezonanță ideală $\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$.

b) Pentru $R_1^2 > \frac{L}{C}$ și $R_2^2 < \frac{L}{C}$ (sau invers), rezultă o pulsație de rezonanță imaginară, deci circuitul nu va fi rezonant pentru nici o pulsație.

c) În cazul particular $R_1^2 = R_2^2 = \frac{L}{C}$, rezultă o nedeterminare a pulsației de rezonanță, deci circuitul este rezonant pentru orice pulsație. Acest circuit se numește complet aperiodic și este utilizat în măsurări electrice.

17.4. ÎMBUNĂTĂȚIREA FACTORULUI DE PUTERE

În general instalațiile electrice receptoare (transformatoare, motoare asincrone etc.) absorb de la rețea un curent inductiv, defazat în urma tensiunii.

Din expresia puterii active:

$$P = UI \cos \varphi, \quad (17.43)$$

rezultă că, la tensiune constantă, curentul absorbit de la rețea, pentru o aceeași putere, este cu atît mai mare cu cît factorul de putere ($\cos \varphi$) este mai mic. Corespunzător cu aceasta, pierderile de putere pe linia de trans-

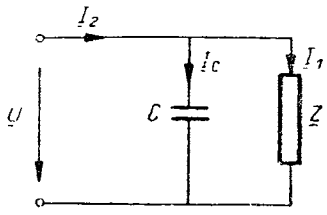


Fig. 17.9

port $R_e I^2$, precum și pierderea de tensiune pe linie (vezi par. 16.5) sînt cu atît mai mari cu cît curentul este mai mare. Din acest motiv, în practică se urmărește funcționarea receptoarelor cu un factor de putere cît mai mare pentru a obține un curent cît mai mic (la tensiune și putere constantă).

Îmbunătățirea factorului de putere se realizează conectînd în paralel cu receptorul, motoare sincrone supraexcitate sau condensatoare.

În figura 17.9 este prezentată schema de îmbunătățire a factorului de putere la un receptor de impedanță $\underline{Z}$, prin conectarea în paralel cu receptorul a unui condensator electric de capacitate C. Cînd condensatorul nu este conectat, curentul absorbit de la rețea (egal cu curentul prin receptor) este defazat în urma tensiunii cu un unghi φ_1.

Se pune problema de a găsi valoarea capacității condensatorului pentru a îmbunătăți factorul de putere al instalației de la valoarea $\cos \varphi_1$ la valoarea $\cos \varphi_2$ (φ_2 fiind unghiul de defazaj între tensiune și curentul absorbit de la rețea, cînd condensatorul este conectat în paralel cu receptorul).

Aplicînd teorema întîi a lui Kirchhoff, se găsește relația:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{I}_C, \tag{17.44}$$

care este reprezentată în diagrama fazorială din figura 17.10, unde s-a luat tensiunea ca origine de fază. Curentul prin condensator este defazat înaintea tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$.

Din figură, se poate stabili relația între valorile efective ale curenților:

$$I_C = I_1 \sin \varphi_1 - I_2 \sin \varphi_2. \tag{17.45}$$

Deoarece condensatorul (fiind element reactiv) nu modifică puterea activă absorbită de la rețea, se poate scrie relația:

$$P = UI_1 \cos \varphi_1 = UI_2 \cos \varphi_2. \tag{17.46}$$

Curentul prin condensator este dat de relația:

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \omega C U. \tag{17.47}$$

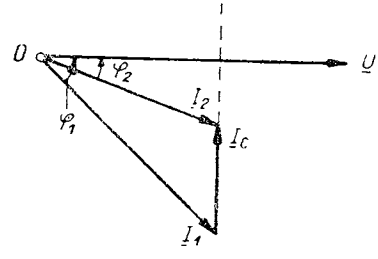


Fig. 17.10

Înlocuind (17.46) și (17.47) în (17.45), se obține valoarea capacității condensatorului:

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2). \tag{17.48}$$

După cum este ușor de observat, dacă factorul de putere crește de la valoarea cos φ_1 la valoarea cos φ_2, curentul absorbit de la rețea scade de la valoarea I_1 la valoarea I_2, dată de relația (din 17.46):

$$I_2 = I_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}. \tag{17.49}$$

Relația (17.48) arată că valoarea capacității este cu atît mai mică cu cît tensiunea este mai mare. Din acest motiv condensatoarele se leagă în general la tensiunea de linie a unui receptor trifazat ($U_l = 380$ V) și nu la tensiunea de fază ($U_f = 220$ V), obținîndu-se în acest caz același efect, dar cu o valoare a capacității de trei ori mai mică.

17.5. CIRCUITE CU REACTANȚE SEMICOMPENSATE

Circuitele rezonante sînt caracterizate conform relațiilor (17.3) sau (17.25) prin aceea că reactanțele inductive și capacitive se compensează reciproc. Circuitele cu reactanțe semicompensate sînt acele circuite pentru care sînt satisfăcute relații de forma:

$$\omega L = \frac{1}{2\omega C}, \tag{17.50}$$

sau de forma:

$$\omega L = \frac{2}{\omega C}. \tag{17.51}$$

În aceste circuite reactanțele se compensează numai pe jumătate.

Există numeroase aplicații practice ale circuitelor cu reactanțe semicompensate. Să examinăm de exemplu circuitul din figura 17.11, în care reactanțele satisfac relația (17.50), iar rezistența R este variabilă.

Curentul din circuit va fi dat de relația:

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y}_e, \tag{17.52}$$

unde admitanța complexă echivalentă este:

$$\underline{Y}_e = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} =$$

$$= \frac{j\omega CR - \omega^2 LC + 1}{R + j\omega L}. \tag{17.53}$$

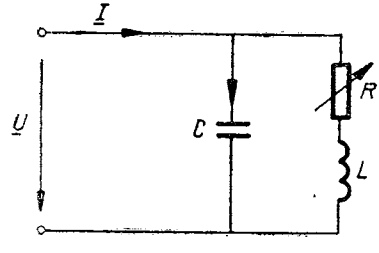


Fig. 17.11

În cazul reactanțelor semicompensate (relația 17.50) rezultă:

$$\underline{Y}_e = \frac{j}{2\omega L} + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{2\omega L(R^2 + \omega^2 L^2)} [2R\omega L + j(R^2 - \omega^2 L^2)]. \quad (17.54)$$

Modulul admitanței este:

$$|\underline{Y}_e| = \frac{1}{2\omega L}, \quad (17.54')$$

iar argumentul este:

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{R^2 - \omega^2 L^2}{2R\omega L}. \quad (17.55)$$

Curentul rezultă:

$$I = \frac{U}{2\omega L}. \quad (17.55')$$

Această relație arată că valoarea efectivă a curentului absorbit de la rețea nu depinde de rezistența R, însă faza curentului conform relației (17.55) variază de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$ cînd rezistența variază de la zero la infinit. Vîrful fazorului $\underline{I}$ se deplasează pe un semicerc (17.12) de rază $\frac{U}{2\omega L}$, cînd rezistența variază de la zero la infinit. Se obține deci un *defazor* de curent.

17.6. OSCILAȚII DE ENERGIE ÎN CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV

Se consideră în figura 17.13 o ramură a unui circuit, care conține elementele R, L, C în serie, alimentată cu o tensiune sinusoidală. Aplicînd legea lui Ohm în valori instantanee, se obține relația:

$$u = u_R + u_L + u_C \quad (17.56)$$

sau

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}. \quad (17.57)$$

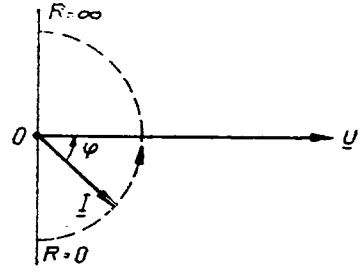


Fig. 17.12

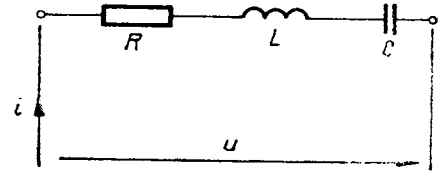


Fig. 17.13

Prin amplificarea cu $i = \frac{dq}{dt}$, se obține bilanțul puterilor instantanee:

$$p = u \cdot i = u_R i + (u_L + u_C)i = R \cdot i^2 + Li\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q\frac{dq}{dt}. \quad (17.58)$$

Primul termen din membrul drept reprezintă puterea instantanee consumată pe rezistență, iar următorii doi termeni reprezintă puterile instantanee la bornele bobinei și respectiv condensatorului. Acești ultimi doi termeni reprezintă o putere reactivă instantanee p_X. Deci se poate scrie:

$$p_R = R \cdot i^2 = u_R \cdot i \quad (17.59)$$

și

$$p_X = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = (u_L + u_C)i = u_X \cdot i. \quad (17.60)$$

Considerînd curentul ca origine de fază, avînd valoarea instantanee de forma,

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t, \quad (17.61)$$

în figura 17.14 s-a construit diagrama fazorială, corespunzătoare circuitului considerat. Căderile de tensiune active și reactive sînt:

$$U_R = U \cos \varphi \quad (17.62)$$

$$U_X = U \sin \varphi. \quad (17.63)$$

În valori instantanee, ținînd cont de defazajele care apar în figură, rezultă:

$$u_R = \sqrt{2}U \cos \varphi \cdot \sin \omega t \quad (17.64)$$

și

$$u_X = \sqrt{2}U \sin\varphi \cdot \cos\omega t. \quad (17.65)$$

Puterea instantanee activă va fi:

$$p_R = Ri^2 = u_R \cdot i = 2UI \cos \varphi \sin^2 \omega t \quad (17.66)$$

sau

$$p_R = UI \cos \varphi(1 - \cos 2\omega t) \geqslant 0, \quad (17.67)$$

Puterea instantanee activă este deci totdeauna pozitivă. Termenul $UI \cos \varphi$ este chiar puterea activă P a circuitului (vezi relația 15.48). Reprezentarea grafică a relației (17.67) este dată în figura 17.15. Puterea instantanee activă (la bornele rezistenței) este o mărime pulsatorie (cu pulsația 2ω), avînd amplitudinea de variație egală chiar cu puterea activă consumată de către circuit.

Puterea instantanee reactivă, din (17.60) și (17.65), este:

$$p_X = \sqrt{2}U \sin\varphi \cos \omega t \cdot I\sqrt{2} \sin \omega t = UI \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t. \quad (17.68)$$

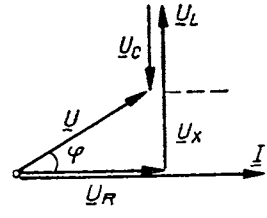


Fig. 17.14

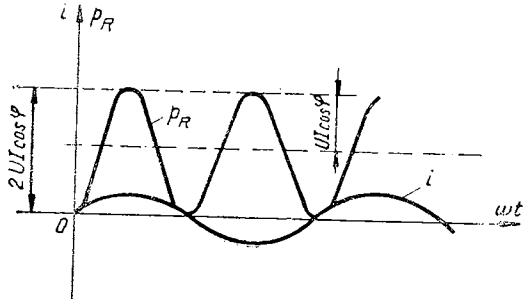


Fig. 17.15

Termenul $UI \sin \varphi$ este chiar puterea reactivă (vezi relația 15.56) a circuitului. Reprezentarea grafică a relației (17.68) este dată în figura 17.16. Puterea instantanee reactivă este deci o mărime alternativă sinusoidală, cu pulsația 2ω, a cărei amplitudine de variație este egală cu puterea reactivă din circuit.

Ținînd cont de expresia energiei electrice (relația 14.10) și a energiei magnetice (relația 14.12):

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{Cu_c^2}{2} = CU_c^2 \cos^2 \omega t \tag{17.69}$$

$$W_m = \frac{L \cdot i^2}{2} = LI^2 \sin^2 \omega t \tag{17.70}$$

expresia puterii reactive instantanee (relația 17.60) se mai poate scrie:

$$p_X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_m + W_e) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[LI^2 \sin^2 \omega t + CU_c^2(1 - \sin^2 \omega t)] =$$

$$= \omega(LI^2 - CU_c^2) \sin 2\omega t. \tag{17.71}$$

Identificînd relația (17.71) cu relația (17.68) se găsește următoarea formă pentru puterea reactivă:

$$Q = \omega(LI^2 - CU_c^2) = \omega(W_{m\,max} - W_{e\,max}), \tag{17.72}$$

deci rezultă că puterea reactivă este egală cu amplitudinea de variație a energiei acumulate în cîmpul electromagnetic al circuitului.

Într-un circuit rezonant ($\varphi = 0$) rezultă puterea instantanee activă:

$$p_R = UI(1 - \cos 2\omega t), \tag{17.73}$$

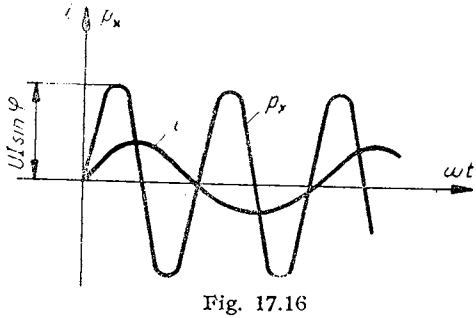


Fig. 17.16

iar puterea instantanee reactivă devine nulă. Această ultimă constatare conduce la ipoteza că în cazul rezonanței suma dintre energia magnetică și cea electrică este o constantă, conform relației (17.71). Într-adevăr, dacă se înlocuiește în (17.69) relația:

$$U_c = \frac{I}{\omega C}, \tag{17.74}$$

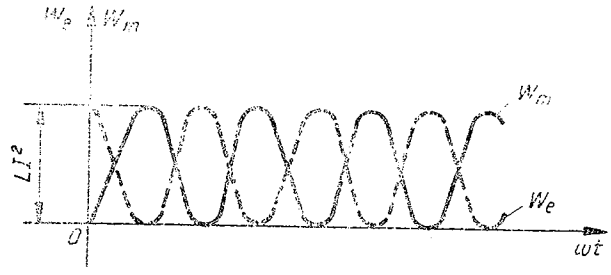


Fig. 17.17

și se ține cont că la rezonanță există egalitatea $L\omega = \frac{1}{\omega C}$, rezultă:

$$W_e = LI^2 \cos^2 \omega t. \tag{17.75}$$

La rezonanță, variația energiei electrice (după 17.75) și a energiei magnetice (17.70) este reprezentată în figura 17.17. Amplitudinile de variație ale acestor energii sînt egale cu $\frac{1}{2} LI^2$, iar suma lor este constantă și egală cu LI^2.

CAPITOLUL 18

CUADRIPOLI ELECTRICI

Un cuadripol este o rețea electrică care are patru borne de acces cu exteriorul, iar laturile interioare nu prezintă cuplaje magnetice cu exteriorul. În cele ce urmează se consideră numai cuadripoli pasivi, adică aceia care nu conțin în interior surse de tensiune electromotoare. În plus se consideră parametrii tuturor elementelor ca fiind constanți (cuadripoli liniari, pasivi). Exemple de cuadripoli sînt: transformatoarele electrice (au două borne de intrare — primarul — și două de ieșire — secundarul), liniile lungi de transport al energiei electrice etc.

18.1. ECUAȚIILE CUADRIPOLULUI

Dacă se consideră cuadripolul din figura 18.1, avînd bornele de intrare $1-1'$ și bornele de ieșire $2-2'$, se poate demonstra că între mărimile de intrare ($\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$) și mărimile de ieșire ($\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$) există relațiile:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \tag{18.1}$$

Coeficienții $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ și $\underline{D}$ sînt mărimi complexe și se numesc parametrii fundamentali ai cuadripolului. Relația (18.1) reprezintă forma fundamentală a ecuațiilor cuadripolului. Se poate vedea imediat că parametrii $\underline{A}$ și $\underline{D}$ sînt mărimi adimensionale, $\underline{B}$ are dimensiunea unei impedanțe, iar $\underline{C}$ are dimensiunea unei admitanțe.

La o frecvență invariabilă a tensiunii de alimentare, parametrii cuadripolului sînt niște constante și din acest motiv ei se numesc constantele cuadripolului. Între constantele cuadripolului pasiv există o relație importantă:

$$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1, \tag{18.2}$$

numită condiție de reciprocitate.

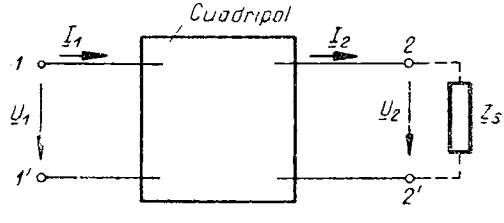


Fig. 18.1

Dacă se alimentează cuadripolul pe la bornele de ieşire (fig. 18.2), se observă că faţă de schema iniţială, curenţii $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ şi-au schimbat sensul, deci ecuaţiile (18.1) se scriu acum:

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{A}\,\underline{U}_1 - \underline{B}\,\underline{I}_1 \\ -\underline{I}_2 &= \underline{C}\,\underline{U}_1 - \underline{D}\,\underline{I}_1, \end{aligned} \qquad (18.3)$$

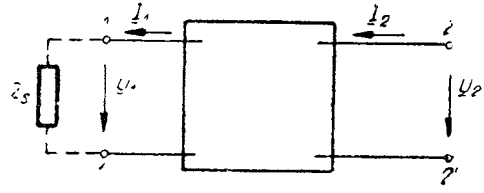


Fig. 18.2

care rezolvate în raport cu $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_1$, şi ţinînd cont de (18.2), devin:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{D}\,\underline{U}_2 + \underline{B}\,\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\,\underline{U}_2 + \underline{A}\,\underline{I}_2 \end{aligned} \qquad (18.4)$$

Comparînd relaţiile (18.4) cu (18.1) rezultă că la inversarea bornelor de intrare cu bornele de ieşire corespunde inversarea constantelor $\underline{A}$ şi $\underline{D}$ în ecuaţiile cuadripolului. Această observaţie permite să afirmăm că se obţine un cuadripol simetric dacă:

$$\underline{A} = \underline{D}. \qquad (18.5)$$

18.2. SCHEME ECHIVALENTE ALE CUADRIPOLULUI

Deoarece cele patru constante ale cuadripolului sînt legate prin condiţia de reciprocitate (18.2), rezultă că numai trei dintre ele sînt independente. Cuadripolul poate fi înlocuit deci cu o schemă echivalentă care trebuie să conţină numai trei elemente. Sînt posibile două scheme echivalente: schema în T (fig. 18.3) şi schema în Π (fig. 18.4).

Să stabilim legătura între parametrii schemelor echivalente şi constantele cuadripolului.

Pentru schema în T se pot scrie relaţiile:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + (\underline{U}_2 + \underline{Z}_2\underline{I}_2)\,\underline{Y}_0 = \underline{Y}_0\underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_2\underline{Y}_0)\cdot \underline{I}_2 \qquad (18.6)$$

apoi:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{U}_2 = \underline{Z}_1\underline{Y}_0\underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_0\underline{Y}_0)\,\underline{I}_2 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{U}_2 = \\ &= (1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_0)\,\underline{U}_2 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y}_0)\,\underline{I}_2. \end{aligned} \qquad (18.7)$$

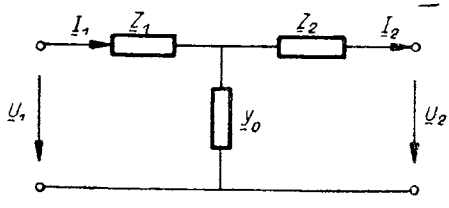


Fig. 18.3

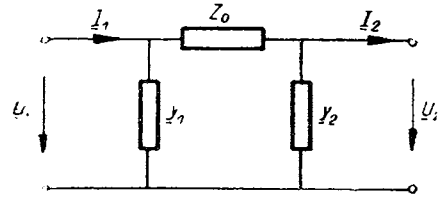


Fig. 18.4

Identificînd relaţiile (18.6) şi (18.7) cu (18.1), se obţin constantele cuadripolului în funcţie de parametrii schemei echivalente în T:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_0\,;\ \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y}_0\,;\ \underline{C} = \underline{Y}_0\,;\ \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2\underline{Y}_0, \tag{18.8}$$

sau invers:

$$\underline{Y}_0 = \underline{C}\,;\ \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}}\,;\ \underline{Z} = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{C}}. \tag{18.9}$$

Cuadripolul este simetric pentru $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$.

Pentru schema în II, *se pot scrie relaţiile:*

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_0(\underline{I}_2 + \underline{U}_2\underline{Y}_2) + \underline{U}_2 = (1 + \underline{Y}_2\underline{Z}_0)\,\underline{U}_2 + \underline{Z}_0\underline{I}_2, \tag{18.10}$$

apoi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_1\underline{Y}_1 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}_0)\,\underline{U}_2 + (1 + \underline{Y}_1\underline{Z}_0)\,\underline{I}_2. \tag{18.11}$$

Identificînd relaţiile (18.10) şi (18.11) cu (18.1), se obţin constantele cuadripolului în funcţie de parametrii schemei echivalente în II:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Y}_2\underline{Z}_0\,;\ \underline{B} = \underline{Z}_0\,;\ \underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}_0\,;\ \underline{D} = 1 + \underline{Y}_1\underline{Z}_0, \tag{18.12}$$

sau invers:

$$\underline{Z}_0 = \underline{B}\,;\ \underline{Y}_1 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{B}}\,;\ \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{B}}. \tag{18.13}$$

Cuadripolul este simetric pentru $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2$.

18.3. ÎNCERCAREA ÎN GOL ŞI ÎN SCURTCIRCUIT A CUADRIPOLULUI

Regimurile limită de funcţionare ale cuadripolului sînt caracterizate de valorile limită ale impedanţei de sarcină $\underline{Z}_s$ (fig. 18.1). Regimul de *mers în gol* corespunde unei impedanţe de sarcină $\underline{Z}_s = \infty$, iar regimul de *scurtcircuit* corespunde unei impedanţe de sarcină $\underline{Z}_s = 0$.

Aceste regimuri se realizează astfel încît la mersul în gol, tensiunea secundară să aibă valoarea $\underline{U}_2$, iar la mersul în scurtcircuit curentul secundar să fie egal cu $\underline{I}_2$.

Mărimile de la intrare pentru încercarea de mers în gol se notează cu $\underline{U}_{10}$ şi $\underline{I}_{10}$, iar pentru încercarea de mers în scurtcircuit cu $\underline{U}_{1sc}$ şi $\underline{I}_{1sc}$.

La mersul în gol, $\underline{I}_2 = 0$, şi ecuaţiile cuadripolului devin:

$$\underline{U}_{10} = \underline{A}\,\underline{U}_2\,;\quad \underline{I}_{10} = \underline{C}\,\underline{U}_2. \tag{18.14}$$

La mersul în scurtcircuit, $\underline{U}_2 = 0$, deci ecuaţiile cuadripolului se scriu:

$$\underline{U}_{1sc} = \underline{B} \cdot \underline{I}_2\,;\quad \underline{I}_{1sc} = \underline{D} \cdot \underline{I}_2. \tag{18.15}$$

Introducînd relațiile (18.14) și (18.15) în ecuațiile cuadripolului (18.1), rezultă:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{10} + \underline{U}_{1sc}; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_{10} + \underline{I}_{1sc}. \tag{18.16}$$

Această relație arată că un regim de funcționare al cuadripolului (caracterizat de $\underline{U}_2$ și $\underline{I}_2$) poate fi obținut ca o suprapunere a celor două regimuri extreme: mersul în gol și mersul în scurtcircuit.

Relațiile (18.14) și (18.15) dau impedanțele echivalente bornelor primare la mersul în gol și scurtcircuit:

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} \tag{18.17}$$

$$\underline{Z}_{1sc} = \frac{\underline{U}_{1sc}}{\underline{I}_{1sc}} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}. \tag{18.18}$$

Dacă se alimentează cuadripolul pe la bornele de ieșire, impedanțele echivalente, la mersul în gol și scurtcircuit pentru bornele de la ieșire, vor avea valorile:

$$\underline{Z}_{20} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}} \text{ și } \underline{Z}_{2sc} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} \tag{18.19}$$

(se inversează constantele $\underline{A}$ și $\underline{D}$).

De fapt la alimentarea cuadripolului invers nu mai e nevoie decît de o singură încercare, deoarece a patra ecuație este dată de condiția de reciprocitate. Ea poate fi utilizată doar ca verificare.

18.4. IMPEDANȚA CARACTERISTICĂ ȘI CONSTANTA DE PROPAGARE A CUADRIPOLULUI SIMETRIC

S-a văzut în paragraful 18.2 că un cuadripol este caracterizat prin trei parametri independenți. Cuadripolul simetric însă este caracterizat numai prin două constante independente. Cele două constante caracteristice cuadripolului simetric pot fi luate arbitrar și de exemplu ele pot fi: impedanța caracteristică și constanta de propagare, noțiuni care se vor defini mai jos.

Se numește *impedanță caracteristică* sau repetată, impedanța care conectată la bornele de ieșire se regăsește la bornele de intrare, adică există relația:

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}. \tag{18.20}$$

Făcînd raportul între cele două ecuații (18.1) pentru un cuadripol simetric ($\underline{A} = \underline{D}$),

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2}{\underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A} \cdot \underline{I}_2} \tag{18.21}$$

și împărțind numitorul și numărătorul membrului drept din (18.21) prin $\underline{I}_2$, ținînd cont de (18.20) rezultă ecuația:

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A} \cdot \underline{Z}_c + \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{Z}_c + \underline{A}}. \tag{18.22}$$

Rezolvînd ecuația (18.22) se obține impedanța caracteristică a cuadripolului simetric sub forma:

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}. \tag{18.23}$$

Această expresie a impedanței caracteristice permite să tragem concluzia că în cazul particular cînd

$$\underline{B} = \underline{C} = 0, \tag{18.24}$$

orice impedanță este o impedanță caracteristică.

Din expresiile care dau constantele cuadripolului pentru cele două scheme echivalente:

$$\underline{B} = 2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_1^2 \underline{Y}_0\,; \quad \underline{C} = \underline{Y}_0, \text{ pentru schema în } T \tag{18.25}$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_0\,; \quad \underline{C} = 2\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1^2 \underline{Z}_0, \text{ pentru schema în } \Pi, \tag{18.26}$$

condiția (18.24) conduce la următoarele condiții echivalente: $\underline{Y}_0 = 0$ și $\underline{Z}_1 = 0$, respectiv $\underline{Z}_0 = 0$ și $\underline{Y}_1 = 0$, adică aceste condiții pot fi îndeplinite numai pentru cuadripoli formați exclusiv din elemente reactive acordate la rezonanță (fig. 18.5).

Dacă cuadripolul simetric este închis pe impedanța caracteristică, ecuațiile cuadripolului se scriu:

$$\underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_2(\underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}) \tag{18.27}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A} \cdot \underline{I}_2 = \underline{I}_2(\underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}) \tag{18.28}$$

Deci:

$$\left|\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}\right. \tag{18.29}$$

Se numește *constantă de propagare* a cuadripolului simetric logaritmul natural al expresiei (18.29):

$$\underline{\gamma} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \ln(A + \sqrt{BC}). \tag{18.30}$$

Numărul complex $\underline{\gamma}$ se poate pune sub forma:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta, \tag{18.31}$$

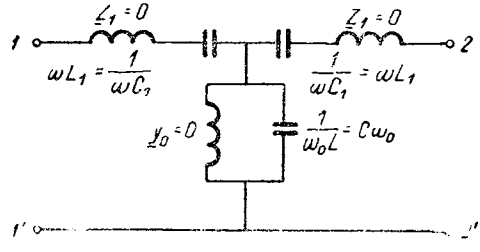


Fig. 18.5

unde α se numeşte constanta de atenuare, iar β se numeşte constanta de fază.

Deoarece:

$$e^{\underline{\gamma}} = \underline{A} + \sqrt{\underline{BC}} \text{ şi} \qquad (18.32)$$
$$1 = \underline{A}^2 - \underline{BC} \text{ (condiţia de reciprocitate),}$$

rezultă:

$$e^{-\underline{\gamma}} = \underline{A} - \sqrt{\underline{BC}}. \qquad (18.33)$$

Din (18.32) şi (18.33) se pot deduce relaţiile:

$$\underline{A} = \frac{1}{2}(e^{\underline{\gamma}} + e^{-\underline{\gamma}}) = ch\ \underline{\gamma} \qquad (18.34)$$

$$\sqrt{\underline{BC}} = \frac{1}{2}(e^{\underline{\gamma}} - e^{-\underline{\gamma}}) = sh\underline{\gamma}. \qquad (18.35)$$

Ţinînd cont de (18.23), din (18.35) rezultă:

$$\underline{B} = \underline{Z}_c \text{ sh } \underline{\gamma};\ \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_c} sh\ \underline{\gamma}. \qquad (18.36)$$

Cu relaţiile (18.34) şi (18.36) ecuaţiile cuadripolului simetric se pot exprima în funcţie de impedanţa caracteristică $\underline{Z}_c$ şi constanta de propagare $\underline{\gamma}$ astfel:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \text{ ch}\underline{\gamma} + \underline{I}_2\underline{Z}_c \text{ sh } \underline{\gamma} \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh } \underline{\gamma} + \underline{I}_2 \text{ ch } \underline{\gamma} \end{aligned} \qquad (18.37)$$

Din încercarea în gol ($\underline{I}_2 = 0$) şi la scurtcircuit ($\underline{U}_2 = 0$) a cuadripolului simetric alimentat numai pe la bornele de intrare, rezultă:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_2 \text{ch}\underline{\gamma};\ \underline{I}_{10} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh } \underline{\gamma} \qquad (18.38)$$

$$\underline{U}_{1sc} = \underline{I}_2\underline{Z}_c \text{ sh } \underline{\gamma};\quad \underline{I}_{1sc} = \underline{I}_2 \text{ ch } \underline{\gamma}. \qquad (18.39)$$

Împărţind relaţiile, se obţine:

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_c}{\text{th}\underline{\gamma}};\ \underline{Z}_{1sc} = \underline{Z}_c \text{th}\underline{\gamma} \qquad (18.40)$$

cu care se determină constantele $\underline{Z}_c$ şi $\underline{\gamma}$:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_{10} \cdot \underline{Z}_{1sc}} \qquad (18.41)$$

$$\text{th } \underline{\gamma} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1sc}}{\underline{Z}_{10}}}. \qquad (18.42)$$

Trebuie remarcat faptul că atît impedanţa caracteristică $\underline{Z}_c$ cît şi constanta de propagare $\underline{\gamma}$ sînt constante numai dacă frecvenţa este invariabilă.

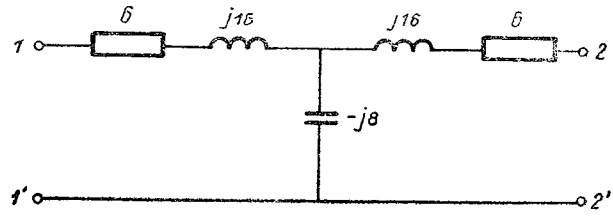


Fig. 18.6

Aplicație

Să se determine constantele fundamentale ale cuadripolului din figura 18.6, precum și impedanța caracteristică și constanta de propagare, dacă la o frecvență dată, schema echivalentă în T conține elementele indicate pe figură în ohmi.

Constantele fundamentale se determină cu relațiile (18.8):

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_0 = 1 + (6 + j16)\,j\,\frac{1}{8} = -1 + 0{,}75\,j; \tag{18.43}$$

$$\underline{B} = 2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_1^2\underline{Y}_0 = 2(6 + j16) + (6 + j16)^2 \cdot j\,\frac{1}{8} = -12 + 4{,}5\,j; \tag{18.44}$$

$$\underline{C} = \underline{Y}_0 = \frac{j}{8} = 0{,}125\,j. \tag{18.45}$$

Impedanța caracteristică (relația 18.23) este:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{(-12 + 4{,}5j)(-j8)} \approx 8{,}3 - 5{,}8j. \tag{18.46}$$

Constanta de propagare este:

$$\underline{\gamma} = \ln\,(\underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}) = \ln\,[-1 + 0{,}75\,j + \sqrt{0{,}125\,j\,(-12 + 4{,}5\,j)}\,] =$$

$$= \ln\,(-0{,}25 - 0{,}3j) = -0{,}95 + j \cdot 2{,}27. \tag{18.47}$$

18.5. FILTRE ELECTRICE DE FRECVENȚĂ

În tehnica frecvențelor înalte se întîlnesc foarte des situații în care este necesar să se lase să treacă de la generator la receptor numai curenți ai căror frecvență se găsesc într-o anumită gamă de frecvență. Pentru aceasta, între generator și receptor se intercalează cuadripoli care pot îndeplini aceste funcții și în acest caz cuadripolii respectivi se numesc filtre electrice de frecvență.

Filtrele care lasă să treacă curenții care au frecvențe cuprinse între ω_1 și ω_2 se numesc filtre „trece-bandă". Filtrele care lasă să treacă frecvențele cuprinse între 0 și ω_0 sau între ω_0 și ∞ se numesc filtre „trece-jos" și respectiv filtre „trece-sus".

18.5.1. Intervalele de trecere ale filtrelor

Se presupune că filtrul este reprezentat de un cuadripol simetric care conține numai elemente reactive. Constantele fundamentale sînt date de relațiile (18.34) și (18.36). Rezultă deci:

$$\underline{A} = \operatorname{ch} \underline{\gamma} = \operatorname{ch}(\alpha + j\beta) = \operatorname{ch}\alpha \cdot \cos\beta + j \operatorname{sh}\alpha \cdot \sin\beta \qquad (18.48)$$

Dar, în cazul cuadripolului care conține numai elemente reactive, constanta $\underline{A}$ (relațiile 18.8 și 18.12) este o mărime reală, deci din (18.48) pot exista următoarele două situații:

a) $\alpha = 0$; $\beta \neq 0$; interval de trecere (semnalul nu este atenuat).

b) $\beta = 0$; $\alpha \neq 0$; interval de atenuare în care semnalul este atenuat de e^{α} ori, conform (18.30) și (18.31).

Corespunzător acestor două situații, avem în intervalul de trecere:

$$\underline{A} = \cos\beta, \text{ deci } \underline{A}^2 \leqslant 1, \qquad (18.49)$$

iar în intervalul de atenuare:

$$\underline{A} = \operatorname{ch}\alpha, \text{ deci } \underline{A}^2 \geqslant 1. \qquad (18.50)$$

Separarea celor două domenii (de trecere și de atenuare) este dată deci de relația:

$$\underline{A}^2 = 1 \text{ sau } \underline{A} = \pm 1. \qquad (18.51)$$

18.5.2. Determinarea limitelor de trecere ale unor filtre

a) Se consideră filtrul din figura 18.7 (cuadripolul simetric și avînd numai elemente reactive), pentru care se poate scrie:

$$\underline{Z}_1 = j\left(\omega L - \omega L_0 - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad (18.52)$$

$$\underline{Y}_0 = \frac{1}{j\omega L_0}. \qquad (18.53)$$

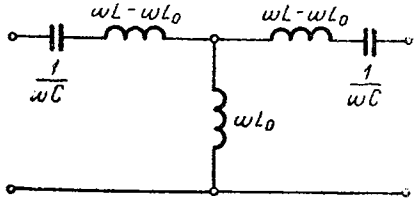


Fig. 18.7

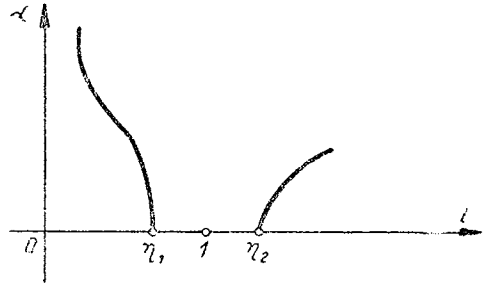


Fig. 18.8

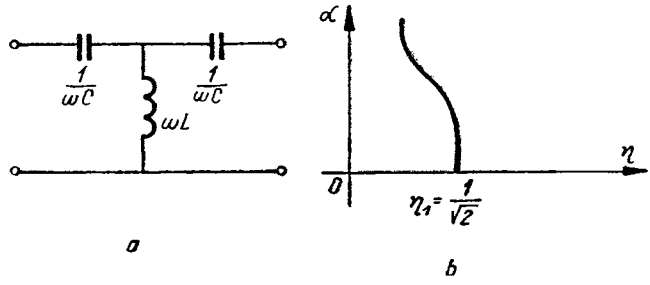


Fig. 18.9

Utilizînd notaţiile:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \eta; \quad \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \text{ şi } \frac{L_0}{L} = k, \tag{18.54}$$

rezultă:

$$\underline{Z}_1 = j\rho\eta\left[(1-k) - \frac{1}{\eta^2}\right]; \tag{18.55}$$

$$\underline{Y}_0 = -\frac{j}{\rho\eta k}. \tag{18.56}$$

Constanta fundamentală $\underline{A}$ a cuadripolului are valoarea(vezi relaţia 18.8):

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_0 = 1 + \frac{1}{k}\left[(1-k) - \frac{1}{\eta^2}\right] = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right). \tag{18.57}$$

Limitele de trecere se determină din (18.51) şi (18.57), şi rezultă:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+k}} \tag{18.58}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{1-k}}. \tag{18.58}$$

Curba de atenuare $\alpha = f(\eta)$ este dată aproximativ în figura 18.8.
Pentru $k = 1$ se obţine filtrul din figura 18.9, *a*, pentru care:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ şi } \eta_2 = \infty, \tag{18.59}$$

deci se obţine un filtru „trece sus", a cărui caracteristică de atenuare $\alpha = f(\eta)$ este dată în figura 18.9, *b*.

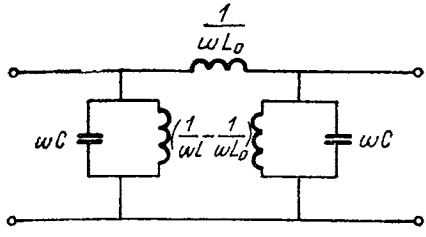


Fig. 18.10

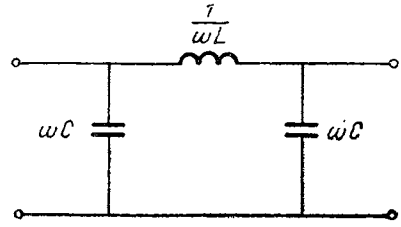


Fig. 18.11

b) Considerînd filtrul din figura 18.10, elementele componente sînt:

$$\underline{Z}_0 = j\omega L_0;$$
$$\underline{Y}_2 = j\left[\omega C + \left(\frac{1}{\omega L_0} - \frac{1}{\omega L}\right)\right]; \tag{18.60}$$

Notînd de această dată $k = \frac{L}{L_0}$ şi menţinînd aceleaşi valori ω_0, η şi ρ, constanta $\underline{A}$ a cuadripolului în II este:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Y}_2 \cdot \underline{Z}_0 = 1 - \omega L_0 \left[\omega C + \frac{1}{\omega L_0} - \frac{1}{\omega L}\right] = \frac{1}{k}(1 - \eta^2). \tag{18.61}$$

Limitele de trecere se determină punînd condiţia:

$$\frac{1}{k}(1 - \eta^2) = \pm 1,$$

şi rezultă:

$$\eta_1 = \sqrt{1 - k}; \quad \eta_2 = \sqrt{1 + k}. \tag{18.62}$$

Pentru $k = 1$, se obţine:

$$\eta_1 = 0 \text{ şi } \eta_2 = \sqrt{-}, \tag{18.63}$$

deci un filtru „trece jos", a cărui schemă (dedusă din figura 18.10 pentru $k = 1$) este dată în figura 18.11.

Acest filtru este utilizat în toate instalaţiile de redresare.

Exemplu

La redresarea unei singure alternanţe a curentului alternativ, filtrul utilizat trebuie să lase să treacă toate frecvenţele care sînt mai mici decît frecvenţa redresată (50 Hz de exemplu). Avînd la dispoziţie un condensator de 2 × 25 μF se cere a se calcula valoarea inductivităţii.

Cu notațiile utilizate:

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \sqrt{LC} = 2\pi f \sqrt{LC},$$

din (18.63) rezultă:

$$2\pi f \sqrt{LC} = \sqrt{2}, \text{ sau } L = \frac{1}{2\pi^2 f^2 C}. \tag{18.64}$$

Avînd $C = 25\ \mu F$ și impunînd $f = 50$ Hz, rezultă valoarea inductivității:

$$L = \frac{1}{2\pi^2 \cdot 50^2 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} \cong 0{,}8 \text{ H}. \tag{18.65}$$

În cazul redresării ambelor alternanțe, frecvența minimă care apare este de 100 Hz, deci conform relației (18.64) valoarea inductivității este de patru ori mai mică pentru a obține același efect de filtrare.

CAPITOLUL 19

DIAGRAME, LOC GEOMETRIC

Aceste diagrame loc geometric se utilizează în electrotehnică pentru studiul variației curentului sau a tensiunii la bornele unor elemente din circuit, cînd parametrii circuitului variază lent.

19.1. DIAGRAME PRIN URME

a) Dacă se consideră un circuit a cărui impedanță este

$$\underline{Z} = R + jX \tag{19.1}$$

și este alimentat cu tensiune sinusoidală, care în reprezentarea simbolică se consideră origine de fază:

$$\underline{U} = U, \tag{19.2}$$

se poate determina grafic curentul din circuit și unghiul de defazaj φ între curent și tensiune, procedînd ca în figura 19.1.

Se consideră pe axa reală și pe cea imaginară segmentele (numite urme sau tăieturi):

$$OA = \frac{U}{R} \text{ și } OB = \frac{U}{X}. \tag{19.3}$$

Ducînd din punctul O o perpendiculară pe dreapta AB, se demonstrează că segmentul OM este chiar curentul din circuit (la scară), iar unghiul dintre segmentele OA și OM este chiar unghiul de defazaj φ al circuitului; deci fazorul OM reprezintă fazorul curentului $\underline{I}$, cînd s-a ales tensiunea ca origine de fază.

Din asemănarea triunghiurilor, rezultă că unghiul OBA este egal cu unghiul AOM, dar din triunghiul AOB se poate scrie:

$$\text{tg } (\sphericalangle OBA) = \frac{U}{R} : \frac{U}{X} = \frac{X}{R} = \text{tg}\varphi. \tag{19.4}$$

Din triunghiul AOM rezultă:

$$OM = OA \cdot \cos \varphi = \frac{U}{R} \cos \varphi = \frac{U}{Z} = I. \tag{19.5}$$

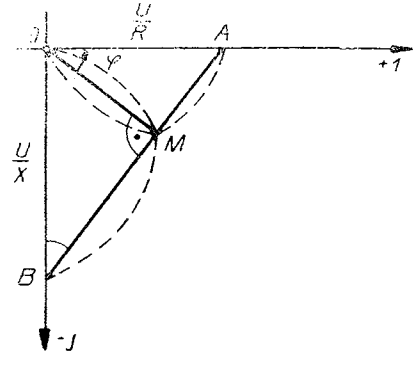


Fig. 19.1

Relațiile (19.4) și (19.5) demonstrează că vectorul OM reprezintă fazorul curentului $\underline{I}$.

Se vede imediat că punctul M poate fi determinat la intersecția cercurilor avînd drept diametre segmentele OA și OB.

Aplicație

Să se determine locul geometric al vîrfului fazorului curentului absorbit de circuitul din figura 19.2, *a*, cînd rezistența circuitului variază între limitele 0 și ∞.

Pentru aceasta se construiește separat locul geometric al lui $\underline{I}_1$ și al lui $\underline{I}_2$ și aplicînd teorema întîi a lui Kirchhoff se deduce:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2. \tag{19.6}$$

Tensiunea fiind constantă, rezultă că curentul $\underline{I}_2$ prin condensator va fi constant și defazat mereu înaintea tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$.

Conform celor expuse mai sus vîrful fazorului curentului $\underline{I}_1$ se va găsi la intersecția cercurilor cu diametrele $\frac{U}{R}$ și $\frac{U}{\omega L}$ (vezi fig. 19.1). Deoarece R variază de la zero la infinit rezultă că și diametrul OA al cercului variază de la ∞ la zero și corespunzător cu aceasta, vîrful fazorului $\underline{I}_1$ se va deplasa pe semicercul cu diametrul $\frac{U}{\omega L}$ (fig. 19.2, *b*).

Utilizînd relația (19.6), rezultă locul geometric al vîrfului fazorului $\underline{I}$ ca fiind semicercul desenat cu linie întreruptă în figura 19.2, *b*.

În cazul particular cînd centrul acestui cerc se va afla în punctul O, curentul absorbit de la rețea va avea modulul constant, dar faza variabilă, cînd rezistența variază. Acest caz particular se obține, după cum este ușor de observat, cînd:

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{U}{\omega L}, \text{ adică } UC\omega = \frac{U}{2\omega L}, \tag{19.7}$$

sau

$$\omega C = \frac{1}{2\omega L}, \tag{19.8}$$

deci cînd circuitul are reactanțele semicompensate.

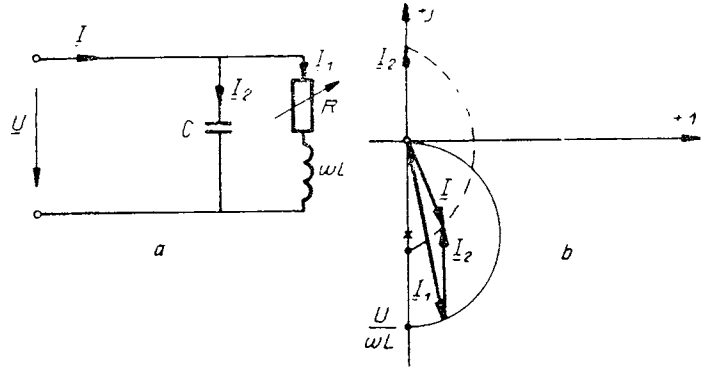


Fig. 19.2

b) Dacă se consideră un circuit a cărui admitanță este:

$$\underline{Y} = G - \mathrm{j}\,B, \qquad (19.9)$$

alegînd curentul ca origine de fază:

$$\underline{I} = I, \qquad (19.10)$$

se poate determina tensiunea la bornele circuitului precum și unghiul de defazaj φ între tensiune și curent, procedînd ca în figura 19.3.

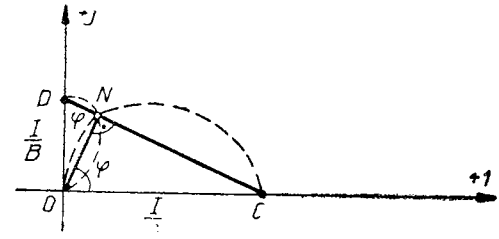


Fig. 19.3

Se consideră pe axa reală segmentul:

$$OC = \frac{I}{G} \text{ și} \qquad (19.11)$$

pe axa imaginară segmentul:

$$OD = \frac{I}{B}. \qquad (19.12)$$

Ducînd din O perpendiculara ON pe segmentul DC, se demonstrează că fazorul ON reprezintă chiar tensiunea U, curentul fiind luat ca origine de fază.

Într-adevăr rezultă:

$$\sphericalangle ODC = \sphericalangle NOC \text{ și } \operatorname{tg}(\sphericalangle ODC) = \frac{I}{G} : \frac{I}{B} = \frac{B}{G} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad (19.13)$$

iar din triunghiul ONC:

$$ON = OC\cos\varphi = \frac{I}{G}\cos\varphi = \frac{I}{Y} = U. \qquad (19.14)$$

Vîrful fazorului U (punctul N din figura 19.3) poate fi determinat la intersecția cercurilor cu diametrele $OC = \frac{I}{G}$ și $OD = \frac{I}{B}$.

19.2. INVERSIUNEA ÎN PLANUL REAL ȘI ÎN PLANUL COMPLEX

Faptul că cele două mărimi fundamentale care caracterizează circuitele de curent alternativ (impedanța $\underline{Z}$ și admitanța $\underline{Y}$) sînt inverse una alteia, ne conduce la construirea curbelor loc geometric inverse.

19.2.1. Inversiunea în planul real

Prin definiție, două puncte A și A' sînt inverse dacă este îndeplinită condiția:

$$OA \cdot OA' = R^2, \qquad (19.15)$$

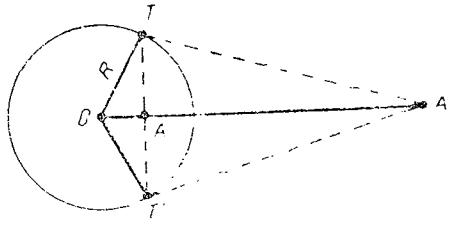


Fig. 19.4

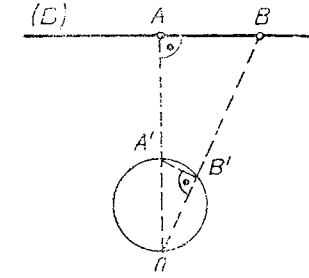


Fig. 19.5

unde O se numește centru de inversiune, iar R este raza de inversiune (mărimea $R^2 = K$ se numește puterea de inversiune).

În figura 19.4 se prezintă procedeul grafic de obținere a punctelor inverse A și A', față de centrul de inversiune O, considerînd raza de inversiune R. Se duce cerul de inversiune cu raza R și centrul în O. Din punctul A se duc tangentele AT și AT' la acest cerc, iar intersecția dreptei OA cu TT' ne dă punctul A' care este inversul punctului A.

Din asemănarea triunghiurilor OAT și $OA'T$ rezultă relația de inversiune:

$$OA \cdot OA' = R^2. \tag{19.16}$$

Inversiunea se poate aplica nu numai unor puncte izolate ci și curbelor oarecare. În acest caz, dacă curba este complicată, inversiunea ei se face punct cu punct.

Se poate arăta că inversa unei drepte care nu trece prin centrul de inversiune este un cerc care trece prin centrul de inversiune și are centrul pe perpendiculara dusă pe dreaptă, din centrul de inversiune. Se consideră dreapta (D) și centrul de inversiune O (fig. 19.5). Se duce perpendiculara OA pe dreaptă și efectuăm inversiunea punctului A (ca în fig. 19.4) găsind inversul său A', care satisface relația (19.16): $OA \cdot OA' = R^2$.

Ducînd apoi cercul cu diametrul OA' se arată că oricărui punct de pe acest cerc îi corespunde prin inversiune un punct pe dreapta (D). Astfel se duce arbitrar dreapta OB, care întîlnește cercul în punctul B'. Unghiul $OB'A'$ este un unghi drept, deoarece OA' este diametru, deci triunghiurile OAB și $OA'B'$ sînt asemenea.

Scriind proporționalitatea laturilor, rezultă:

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OB}, \text{ apoi } OA \cdot OA' = OB \cdot OB', \tag{19.17}$$

deci punctele B și B' sînt inverse.

Se demonstrează fără mare dificultate că inversul unui cerc care nu trece prin centrul de inversiune este tot un cerc care de asemenea nu trece prin centrul de inversiune.

19.2.2. Inversiunea în planul complex

Inversiunea în planul complex se referă la numerele complexe $\underline{A}$ şi $\underline{A}'$ care satisfac relaţia de inversiune:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}' = R^2, \tag{19.18}$$

în care centrul de inversiune este originea coordonatelor planului complex, iar puterea inversiunii ($K = R^2$) este un număr real.

Dacă numerele complexe sînt:

$$\underline{A} = A\,e^{j\gamma} \text{ şi } \underline{A}' = A'e^{j\gamma'}, \tag{19.19}$$

condiţia ca acestea să fie inverse este:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}' = A \cdot A' \cdot e^{j(\gamma+\gamma')} = R^2. \tag{19.20}$$

Dar, cum puterea de inversiune este un număr real, rezultă:

$$\gamma = -\gamma' \text{ şi } A \cdot A' = R^2. \tag{19.21}$$

Relaţia (19.21) arată că inversiunea în planul complex se efectuează exact ca şi în planul real, cu singura deosebire că ea se efectuează asupra numărului complex conjugat (deoarece avem $\gamma = -\gamma'$).

În figura 19.6 se arată procedeul de inversiune a unui punct în planul complex. Adică, fiind dat numărul complex $\underline{A}$, cu afixul M, se construieşte conjugatul său $\underline{A}^*$ cu afixul în M'', apoi se găseşte exact ca în planul real inversul punctului M'' în M', caracterizat de numărul complex $\underline{A}'$ care este inversul lui $\underline{A}$.

Acest procedeu poate fi extins şi în cazul inversiunii unor curbe oarecare. Procedeul este următorul: fiind dată o curbă oarecare ($\underline{C}$) în planul complex, se construieşte conjugata sa ($\underline{C}^*$), adică curba simetrică faţă de axa reală, iar apoi se inversează curba ($\underline{C}^*$) ca şi în planul real, obţinîndu-se curba ($\underline{C}''$) inversă lui ($\underline{C}$).

Aplicaţie

Să se construiască locul geometric al curentului complex $\underline{I}$ din circuitul reprezentat în figura 19.7, alimentat cu o tensiune sinusoidală de valoare efectivă constantă, dacă reactanţa circuitului variază.

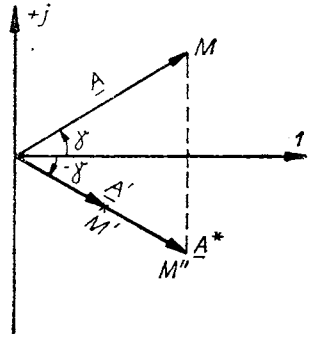


Fig. 19.6

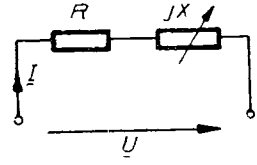


Fig. 19.7

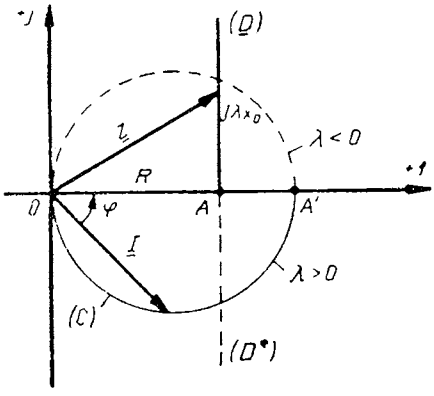


Fig. 19.8

Reactanţa variabilă a circuitului poate fi pusă sub forma:

$$X = \lambda X_0. \tag{19.22}$$

Parametrul variabil λ poate fi negativ (circuitul este capacitativ) sau pozitiv (circuitul este inductiv).

Dacă se consideră tensiunea ca origine de fază, curentul complex va fi dat de relaţia:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{R + j\lambda X_0}. \tag{19.23}$$

Conform acestei relaţii, pentru a obţine locul geometric al curentului, trebuie să efectuăm inversiunea (19.23) în planul complex, puterea de inversiune fiind U.

Relaţia

$$\underline{Z} = R + j\lambda X_0, \tag{19.24}$$

reprezintă în planul complex dreapta ($\underline{D}$), paralelă cu axa imaginară (fig. 19.8). Aplicînd procedeul de inversiune în planul complex, trebuie obţinută conjugata sa ($\underline{D}^*$), care este tot dreapta ($\underline{D}$), apoi se efectuează inversiunea acesteia ca şi în planul real (vezi fig. 19.5).

Se inversează punctul particular A al dreptei (caracterizat de $\lambda = 0$) cu relaţia:

$$OA \cdot OA' = U, \text{ sau } R \cdot OA' = U, \tag{19.25}$$

deci:

$$OA' = \frac{U}{R}, \tag{19.26}$$

apoi se deduce cercul cu diametrul OA' care reprezintă inversul lui ($\underline{D}^*$). Locul geometric al vîrfului fazorului $\underline{I}$ se va plimba pe cercul ($\underline{C}$).

Pentru $\lambda < 0$ (circuit capacitiv) se obţine semicercul din cadranul întîi, iar pentru $\lambda > 0$ (circuit inductiv) se obţine semicercul din cadranul patru.

CAPITOLUL 20

METODE DE ANALIZĂ A CIRCUITELOR LINIARE FUNCȚIONÎND ÎN REGIM PERMANENT PERIODIC SINUSOIDAL

Metoda generală de analiză a circuitelor electrice constă în aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, valabile în orice regim de funcționare. Deoarece prin scrierea teoremelor lui Kirchhoff se obține un număr mare de ecuații, egal cu numărul curenților necunoscuți, adică egal cu numărul de laturi ale rețelei, este incomod de a-l rezolva, și din acest motiv s-au elaborat metode simplificatoare, care conduc la un număr mai mic de ecuații. În majoritatea lor, metodele simplificatoare fac apel la principiul superpoziției (suprapunerii efectelor) și din această cauză, acestea sînt aplicabile numai circuitelor liniare (parametrii R, L, C sînt niște constante).

20.1. METODA SUPRAPUNERII EFECTELOR

Ca și în circuitele de curent continuu (vezi par. 7.3.1), în curent alternativ această teoremă se enunță astfel: *curentul electric din orice latură a unei rețele de curent alternativ, în care există mai multe generatoare, este suma algebrică a curenților produși de fiecare tensiune electromotoare în parte, dacă ar acționa singură în rețea.*

Această teoremă rezultă din caracterul liniar al ecuațiilor scrise aplicînd teoremele lui Kirchhoff, și ea este valabilă numai în circuite liniare.

În curent alternativ sinusoidal, simbolic (în complex), sumarea algebrică se efectuează asupra mărimilor complexe care intervin.

Exemplu

Fiind dată schema din figura 20.1, *a*, se cere curentul $\underline{I}_3$, utilizînd teorema superpoziției.

Conform teoremei superpoziției, circuitul din figura 20.1, *a* se descompune în două circuite în care acționează pe rînd cele două t.e.m. (fig. 20.1, *b* și 20. 1, *c*). Curenții reali în cele trei ramuri, se obțin algebric prin suprapunerea efectelor, adică:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{12} \tag{20.1}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{21} + \underline{I}_{22} \tag{20.2}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} + \underline{I}_{32} \tag{20.3}$$

Dacă impendanțele celor trei ramuri sînt:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1;\ \underline{Z}_2 = R_2;\ Z_3 = \frac{1}{j\omega C_3}. \tag{20.4}$$

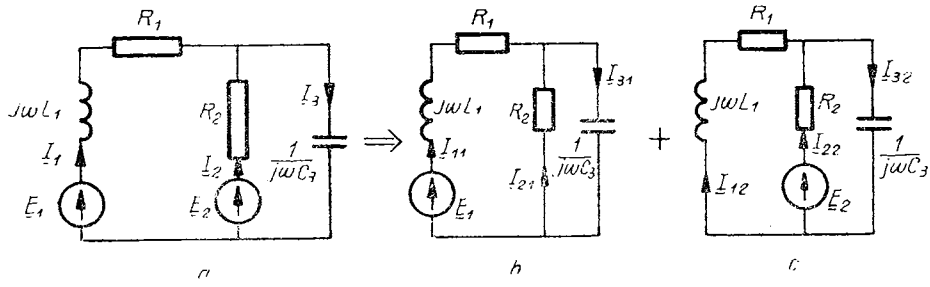


Fig. 20.1

curenții $\underline{I}_{31}$ și $\underline{I}_{32}$, din schemele 20.1. *b*, *c*, vor fi dați de relațiile:

$$\underline{I}_{31} = \underline{I}_{11}\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}}\cdot\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}, \tag{20.5}$$

$$\underline{I}_{32} = \underline{I}_{22}\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2+\dfrac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3}}\cdot\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_2\cdot\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}. \tag{20.6}$$

Înlocuind (20.5) și (20.6) în (20.3), se obține:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_1\cdot\underline{Z}_2+\underline{E}_2\cdot\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}. \tag{20.7}$$

Înlocuind valorile impedanțelor din (20.4) curentul cerut în enunț va fi:

$$I_3 = \frac{\underline{E}_1R_2+\underline{E}_2(R_1+j\omega L_1)}{R_1R_2+\dfrac{L_1}{C_3}+j\left(\omega L_1R_2-\dfrac{R_1+R_2}{\omega C_3}\right)}. \tag{20.8}$$

Dacă se dau în caz particular valorile numerice:

$$E_1 = 60\text{ V};\quad \underline{E}_2 = 30j\text{V}$$

$$R_1 = R_2 = 100\ \Omega;\quad \omega L_1 = 200\ \Omega\ \text{și}\ \frac{1}{\omega C_3} = 100\ \Omega,$$

se obține curentul $\underline{I}_3$:

$$\underline{I}_3 = \frac{60\cdot 100+30j(100+200j)}{100\cdot 100+200\cdot 100+j\left((200\cdot 100-\dfrac{100+100}{\dfrac{1}{100}}\right)} = j\frac{1}{10}\text{ A}. \tag{20.9}$$

Valoarea instantanee va fi:

$$i_3 = \frac{\sqrt{2}}{10}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right). \tag{20.10}$$

20.2.1. Teorema generatorului echivalent de tensiune

Analog cu teorema stabilită în par. 7.3.2, o rețea liniară și activă, avînd două borne A și B de acces și fără cuplaje cu exteriorul, este echivalentă cu un generator ideal de tensiune, avînd t.e.m. $\underline{E}_g$, egală cu tensiunea la bornele $A-B$, la mersul în gol ($\underline{E}_g = \underline{U}_{AB0}$), conectat în serie cu impedanța $\underline{Z}_g$ egală cu impedanța rețelei pasivizate ($\underline{Z}_g = \underline{Z}_{AB0}$).

Curentul $\underline{I}_{AB}$ (fig. 20.2), debitat de rețea pe impedanța de sarcină $\underline{Z}$, va fi dat de relația:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g + \underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_{AB0} + \underline{Z}}. \tag{20.11}$$

20.2.2. Teorema generatorului echivalent de curent

O rețea liniară și activă, cu două borne de ieșire A și B, avînd laturi necuplate cu exteriorul, este echivalentă cu un generator ideal de curent, avînd curentul injectat $\underline{I}_g$ egal cu curentul debitat de rețea la mersul în scurtcircuit ($\underline{I}_g = \underline{I}_{ABsc}$), conectat în paralel cu admitanța $\underline{Y}_g$, egală cu admitanța interioară a rețelei pasivizate ($\underline{Y}_g = \underline{Y}_{AB0}$).

Tensiunea la bornele $\underline{U}_{AB}$ (fig. 20.3) se va calcula cu relația:

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{ABsc}}{\underline{Y}_{AB0} + \underline{Y}}. \tag{20.12}$$

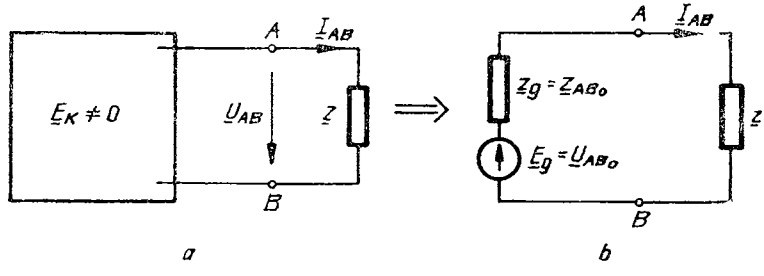


Fig. 20.2

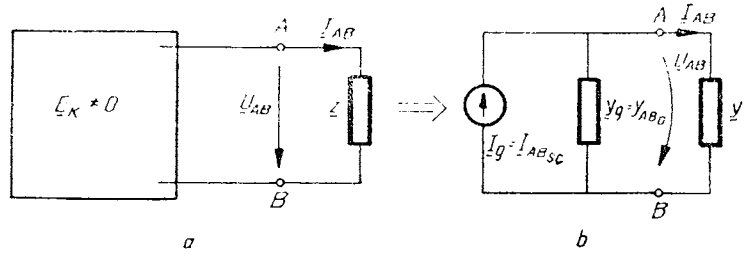


Fig. 20.3

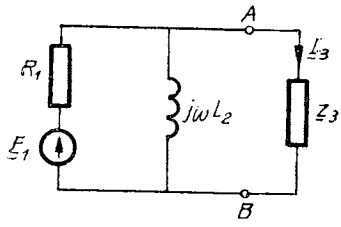


Fig. 20.4

Aplicație

Se consideră circuitul din figura 20.4. Să se determine curentul $\underline{I}_3$ și tensiunea la bornele impedanței $\underline{Z}_3$, utilizînd teorema generatorului echivalent de tensiune și respectiv teorema generatorului echivalent de curent.

Pentru a aplica relația (20.11) trebuie calculate valorile $\underline{U}_{AB0}$ și $\underline{Z}_{AB0}$ cînd ramura $\underline{Z}_3$ este întreruptă (mersul în gol).

În acest caz rezultă:

$$\underline{Z}_{AB0} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \tag{20.13}$$

și

$$\underline{U}_{AB0} = \underline{E}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \tag{20.14}$$

Relația (20.11) conduce la:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_1 \cdot \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}}{\dfrac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}. \tag{20.15}$$

Pentru a aplica teorema generatorului echivalent de curent (relația 20.12), se găsește mai întîi $\underline{I}_{ABsc} = \dfrac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1}$, care înlocuit în (20.12) conduce la:

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\dfrac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1}}{\dfrac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{E}_1 \cdot \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1}. \tag{20.16}$$

Se constată ușor că relațiile (20.15) și (20.16) verifică legea lui Ohm pe latura AB:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_3. \tag{20.17}$$

Înlocuind valorile impedanțelor, $\underline{Z}_1 = R_1$ și $\underline{Z}_2 = j\omega L_2$, se mai poate scrie:

$$\underline{I}_3 = \frac{j\omega L_2 \cdot \underline{E}_1}{j\omega R_1 L_2 + (R_1 + j\omega L_2)\underline{Z}_3}; \quad \underline{U}_{AB} = \frac{j\omega L_2 \cdot \underline{E}_1}{\dfrac{j\omega R_1 L_2}{\underline{Z}_3} + R_1 + j\omega L_2}. \tag{20.18}$$

20.2.3. Teorema transfigurării triunghi-stea și stea-triunghi

Orice triunghi de impedanțe $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{23}$, $\underline{Z}_{31}$ admite o schemă echivalentă unică în stea (fig. 20.5), ale cărei impedanțe sînt:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}. \tag{20.19}$$

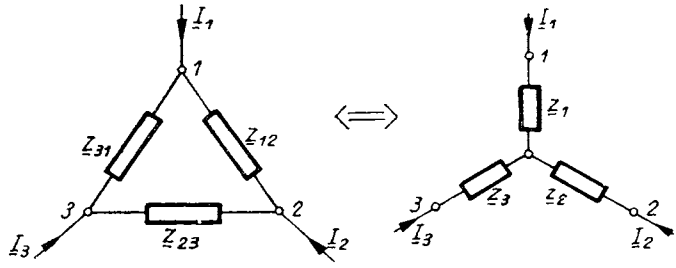


Fig. 20.5

Sistemul (20.19) rezolvat invers ne dă relaţiile de transfigurare stea-triunghi:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1};$$
$$\underline{Z}_{31} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}. \tag{20.20}$$

Observaţie

În cazul particular în care,

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_\Delta, \tag{20.21}$$

rezultă din (20.19):

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_Y = \frac{1}{3}\underline{Z}_\Delta. \tag{20.22}$$

Această relaţie care dă echivalenţa între un triunghi simetric (toate impedanţele sînt egale) şi o stea simetrică este deosebit de importantă în studiul reţelelor electrice trifazate.

Exemplu

Fiind dat cuadripolul simetric din figura 18.11 (filtrul trece-jos) în schema echivalentă Π, să i se găsească o schemă echivalentă în T.

După cum este uşor de observat, schema echivalentă în Π corespunde grupării în triunghi a celor trei elemente, iar schema echivalentă în T corespunde unei grupări în stea.

Conform figurii 18.11, impedanţele sînt:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \frac{1}{j\omega C}; \quad \underline{Z}_{31} = j\omega L. \tag{20.23}$$

Utilizînd relaţiile de transfigurare (20.19), se obţine:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3 = \frac{\dfrac{L}{C}}{j\left(\omega L - \dfrac{2}{\omega C}\right)} = \frac{L\omega}{-j(2 - \omega^2 LC)} = j\omega L \tag{20.24}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{-\dfrac{1}{\omega^2 C^2}}{j\left(\omega L - \dfrac{2}{\omega C}\right)} = \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{j(2 - \omega^2 LC)} = \frac{1}{j\omega C}. \tag{20.25}$$

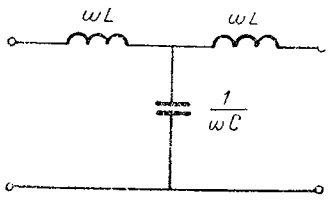


Fig. 20.6

Ultimele egalități din (20.24) și (20.25) sînt valabile pentru $\omega^2 LC = 1$ (vezi relația de la filtre 18.54).

Rezultă în figura 20.6 schema echivalentă în T a unui filtru trece jos, elementele fiind aceleași ca și în figura 18.11.

20.3. METODA CURENȚILOR DE BUCLE SAU CURENȚILOR DE OCHIURI (CURENȚI INDEPENDENȚI)

Fiind dată rețeaua electrică cu L laturi și N noduri, rezultă un număr de bucle independente:

$$B = L - N + 1. \tag{20.26}$$

Curenții independenți notați cu indicele „*prim*" care circulă prin aceste bucle sînt dați de următorul sistem de ecuații, stabilit de Maxwell:

$$\begin{aligned}
&\underline{Z}_{11}\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}'_2 + \ldots + \underline{Z}_{1B}\underline{I}'_B = \Sigma \underline{E}_1 \\
&\underline{Z}_{21}\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}'_2 + \ldots + \underline{Z}_{2B}\underline{I}'_B = \Sigma \underline{E}_2 \\
&\vdots \\
&\underline{Z}_{B1}\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{B2}\underline{I}'_2 + \ldots + \underline{Z}_{BB}\underline{I}'_B = \Sigma \underline{E}_B
\end{aligned} \tag{20.27}$$

Aceasta este un sistem compatibil, avînd B ecuații și B necunoscute (curenții independenți prin cele $B = L - N + 1$ ochiuri, notați cu $\underline{I}'_1$, $\underline{I}'_2$, $\underline{I}'_3 \ldots \underline{I}'_B$).

Interpretarea coeficienților $\underline{Z}_{jk}$ este următoarea: coeficienții cu indicii dubli de forma $\underline{Z}_{kk}$ reprezintă suma tuturor impedanțelor din ochiul independent k, iar coeficienții de tipul $\underline{Z}_{jk}$ reprezintă suma algebrică a impedanțelor comune ochiurilor j și k. În această din urmă sumă, se iau cu plus impedanțele în care curenții j și k au același sens și se iau cu minus impedanțele în care curenții j și k au sensuri contrare. Sumele din membrul drept, de forma $\Sigma \underline{E}_k$ reprezintă suma algebrică a tuturor t.e.m. care acționează în ochiul independent k.

După rezolvarea sistemului (20.27) se determină curenții reali din laturi prin suprapunerea acestor curenți fictivi.

Exemplu

Să se determine curenții din rețeaua reprezentată în figura 20.7, prin metoda curenților independenți.

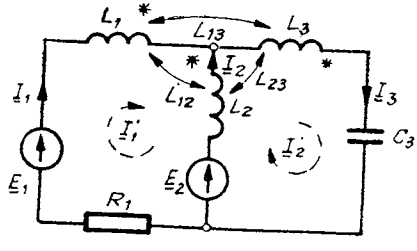


Fig. 20.7

Rețeaua cuprinde:

$L = 3$ laturi și $N = 2$ noduri.

Numărul de ochiuri independente este, deci:

$$B = L - N + 1 = 2.$$

Se aleg curenții independenți $\underline{I}'_1$ și $\underline{I}'_2$ ca în figură, curenții reali fiind $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$.

Relațiile (20.27) devin:

$$\underline{Z}_{11}\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}'_2 = \Sigma \underline{E}_1;\quad \underline{Z}_{21}\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}'_2 = \Sigma \underline{E}_2, \tag{20.28}$$

în care impedanţele sînt:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 - j\omega L_{12} - j\omega L_{21} = R_1 + j\omega(L_1 + L_2 - 2L_{12}) \tag{20.29}$$

$$\underline{Z}_{22} = j\omega L_2 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_{23} + j\omega L_{22} = j\omega(L_2 + L_3 + 2L_{23}) + \frac{1}{j\omega C_3} \tag{20.30}$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -j\omega L_2 + j\omega L_{12} + j\omega L_{13} - j\omega L_{23} = j\omega(L_{12} + L_{13} - L_{23} - L_2), \tag{20.31}$$

iar t.e.m. sînt:

$$\Sigma\underline{E}_1 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2; \quad \Sigma\underline{E}_2 = \underline{E}_3. \tag{20.32}$$

Cu aceste valori se rezolvă sistemul (20.28), apoi curenţii reali, prin suprapunerea efectelor, sînt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1; \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}_1 + \underline{I}'_2; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}'_2. \tag{20.33}$$

20.4. METODA TENSIUNILOR NODALE (POTENŢIALELOR NODURILOR)

Prin această metodă, se operează cu noi variabile numite „potenţialele nodurilor", egale ca număr cu numărul nodurilor independente $N-1$ ale reţelei.

Alegîndu-se nodul de referinţă N, faţă de acest nod, celelalte noduri ale reţelei au potenţialele: $\underline{V}_1, \underline{V}_2 \ldots \underline{V}_n$, care satisfac sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned}
&\underline{Y}_{11}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{V}_2 + \ldots + \underline{Y}_{1n}\cdot\underline{V}_n = \underline{I}_{s1}\\
&\underline{Y}_{21}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 + \ldots + Y_{2n}\,\underline{V}_n = \underline{I}_{s2}\\
&\vdots\\
&\underline{Y}_{n1}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{n2}\underline{V}_2 + \ldots + \underline{Y}_{nn}\cdot\underline{V}_n = \underline{I}_{sn}
\end{aligned} \tag{20.34}$$

unde $n = N - 1$.

În acest sistem, constantele din membrul întîi au următoarea semnificaţie: admitanţele de tipul $\underline{Y}_{kk}$ reprezintă suma tuturor admitanţelor laturilor care sînt legate la nodul k; admitanţele de tipul $\underline{Y}_{kj}$ reprezintă suma cu semn schimbat a admitanţelor laturilor care leagă direct nodurile k şi j.

Curenţii din membrul al doilea (curenţii de scurtcircuit) au următoarea semnificaţie: curentul de scurtcircuit $\underline{I}_{sk}$ reprezintă suma curenţilor injectaţi în nodul k de către sursele de t.e.m., ale laturilor care se leagă la nodul k, calculaţi cu relaţii de forma:

$\underline{I}_{sk} = \sum_{j=1}^{N-1} \underline{Y}_{jk}\,\underline{E}_{jk}$ ($\underline{Y}_{jk}$ este admitanţa laturii ce leagă nodul j cu nodul k, iar $\underline{E}_{jk}$ este t.e.m. care se află pe această latură). În suma care dă , $\underline{I}_{sk}$ se iau cu plus curenţii care sînt daţi de t.e.m. ce au sensul spre nodul k şi se iau cu minus curenţii daţi de t.e.m. ce au sensul dirijat de la nodul k spre alt nod.

Metoda acesta este puţin mai dificilă decît metoda curenţilor de ochiuri, deoarece după rezolvarea sistemului (20.34), pentru a afla curenţii dintr-o latură a circuitului (fig. 20.8) trebuie aplicată legea lui Ohm:

$$\underline{E}_k + \underline{V}_k = \underline{Z}_k\,\underline{I}_k, \quad \text{apoi} \quad \underline{I}_k = \frac{\underline{V}_k + \underline{E}_k}{\underline{Z}_k}. \tag{20.35}$$

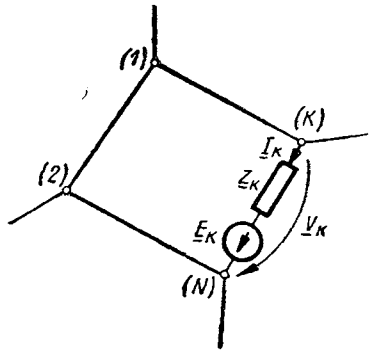


Fig. 20.8

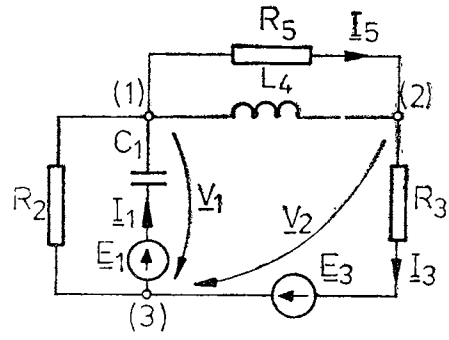


Fig. 20.9

Ea este avantajoasă pentru rețele cu număr mic de noduri, conducînd la un sistem de ecuații cu mai puține necunoscute $(N-1)$ decît în cazul metodei curenților independenți $(L - N + 1)$.

Exemplu

Să se rezolva circuitul din figura 20.9, prin metoda tensiunilor nodale.

Numărul de laturi ale rețelei este $L = 5$, iar numărul de noduri $N = 3$. Se alege nodul (3) ca nod de referință și în acest caz variabilele sistemului (20.34) sînt potențialele nodurilor (1) și (2): $\underline{V}_1$ și $\underline{V}_2$.

Sistemul (20.34) capătă forma:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{V}_2 &= \underline{I}_{s1} \\ \underline{Y}_{21}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 &= \underline{I}_{s2} \end{aligned} \tag{20.36}$$

Admitanțele sînt:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_4} \tag{20.37}$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{j\omega L_4} \tag{20.38}$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{j\omega L_4}\right). \tag{20.39}$$

Curenții de scurtcircuit în noduri sînt:

$$\underline{I}_{s1} = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_1 = j\omega C_1 \underline{E}_1; \quad \underline{I}_{s2} = -\underline{E}_3 \cdot \underline{Y}_3 = -\frac{\underline{E}_3}{R_3}. \tag{20.40}$$

Dacă se dau următoarele valori numerice:

$$R_2 = 4\ \Omega;\ R_3 = R_5 = 2\ \Omega;\ \omega L_4 = \frac{1}{\omega C_1} = 1\ \Omega; \tag{20.41}$$

$$\underline{E}_1 = (10 + 10j)\ \text{V} \text{ și } \underline{E}_3 = 20\ \text{V},$$

relațiile (20.37) ÷ (20.40) devin:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + j + \frac{1}{j} = \frac{3}{4} \quad (\Omega^{-1})$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{j} = -\frac{1}{2} + j \quad (\Omega^{-1})$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{j} = 1 - j \quad (\Omega^{-1})$$

$$\underline{I}_{s1} = (10 + 10j) \cdot j = -10 + 10j \quad (A)$$

$$\underline{I}_{s2} = -20 \cdot \frac{1}{2} = -10 \quad (A)$$

Introducînd apoi în (20.36), prin rezolvarea sistemului obținut se găsesc potențialele nodurilor:

$$\underline{V}_1 = 20j \quad (V) \text{ și } \underline{V}_2 = 10j \quad (V). \tag{20.42}$$

Curenții reali se obțin aplicînd legea lui Ohm. De exemplu:

$$\underline{I}_1 = \frac{-\underline{V}_1 + \underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{10 + 10j - 20j}{\frac{1}{j}} = 10 + 10j \quad (A) \tag{20.43}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_2 + \underline{E}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{10j + 20}{2} = 10 + 5j \quad (A). \tag{20.44}$$

Pentru a afla curentul $\underline{I}_5$ trebuie aflată tensiunea $\underline{U}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = 20j - 10j = 10j$, apoi

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_2}{\underline{Z}_5} = \frac{10j}{2} = 5j \text{ etc.} \tag{20.45}$$

20.5. METODA SEPARĂRII PUTERILOR

Aceasta este o metodă specifică curentului alternativ și ea se utilizează în general numai pentru verificare.

Utilizînd teorema conservării puterilor, într-o rețea izolată (fără borne de acces în exterior), relația 7.21, adică:

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j<k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_{jk}\, i_{jk} = 0, \tag{20.46}$$

prin transcriere în complex se transformă în:

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j<k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \underline{U}_{jk} \cdot \underline{I}^{*}_{jk} = 0, \tag{20.47}$$

în care $\underline{U}_{jk}$ este imaginea în complex a tensiunii la bornele laturii ce leagă nodurile j și k, iar $\underline{I}^{*}_{jk}$ este complexul conjugat al curentului prin aceeași latură.

Aplicînd legea lui Ohm în complex, pentru o latură,

$$\underline{E}_{jk} + \underline{U}_{jk} = \underline{Z}_{jk}\underline{I}_{jk}, \tag{20.48}$$

relația (20.47) capătă forma:

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j<k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \underline{E}_{jk}\, \underline{I}^{*}_{jk} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_{jk} I^{2}_{jk}, \tag{20.49}$$

deoarece $\underline{I}_{jk} \cdot \underline{I}^{*}_{jk} = I^{2}_{jk}$.

Membrul întîi al relației (20.49) reprezintă puterea aparentă complexă debitată de surse, iar membrul al doilea reprezintă puterea aparentă complexă consumată pe impedanțele laturilor.

Dacă se notează puterea aparentă generată de sursele din circuit cu $\underline{S}_g$ și se descompune produsul

$$\underline{Z}_{jk} \cdot I^{2}_{jk} = R_{jk} I^{2}_{jk} + j\, X_{jk} I^{2}_{jk} = P_{jk} + j\, Q_{jk}, \tag{20.50}$$

relația (20.49) se scrie:

$$\sum_{k \in L} \underline{S}_{gk} = \sum_{k \in L} P_k + j \sum_{k \in L} Q_k. \tag{20.51}$$

Deci, puterea aparentă complexă generată de surse are drept componente puterea activă disipată pe rezistențele laturilor și puterea reactivă disipată pe bobinele și condensatoarele din laturi.

Semnul $k \in L$ arată că sumarea se face pentru toate laturile L ale rețelei considerate.

CAPITOLUL 21

SISTEME TRIFAZATE. CARACTERIZARE. PROPRIETĂȚI

Un ansamblu de trei circuite electrice în care acționează trei tensiuni electromotoare alternative, cu aceeași frecvență, dar cu fazele inițiale diferite, este numit sistem trifazat de circuite. Cele trei tensiuni electromotoare formează un sistem trifazat de tensiuni electromotoare, iar curenții care circulă prin aceste trei circuite (numite de obicei fazele sistemului trifazat) formează un sistem trifazat de curenți.

Sistemul trifazat de curenți care circulă prin cele trei faze are forma:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_1) \\ i_2 &= I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_2) \\ i_3 &= I_3\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_3). \end{aligned} \tag{21.1}$$

În complex simplificat (deoarece au aceeași frecvență), sistemul trifazat de curenți se scrie:

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\gamma_1}; \quad \underline{I}_2 = I_2 e^{j\gamma_2}; \quad \underline{I}_3 = I_3 e^{j\gamma_3}. \tag{21.2}$$

21.1. SISTEME TRIFAZATE SIMETRICE

Un sistem trifazat simetric este un sistem de trei mărimi sinusoidale care au aceeași valoare efectivă și sînt defazate între ele cu același unghi $\frac{2\pi}{3}$. Dacă succesiunea mărimilor din diagrama fazorială este spre dreapta, sistemul se numește *direct* (de succesiune directă), iar dacă succesiunea mărimilor este spre stînga sistemul se numește *invers* (de succesiune inversă).

În figura 21.1 este reprezentată diagrama fazorială a unui sistem simetric direct de curenți. Fazorii, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ și $\underline{I}_3$ se succed spre dreapta. În valori instantanee, acești curenți se exprimă prin relațiile:

$$\begin{aligned} i_1 &= I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \\ i_2 &= I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 &= I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{2\pi}{3}\right), \end{aligned} \tag{21.3}$$

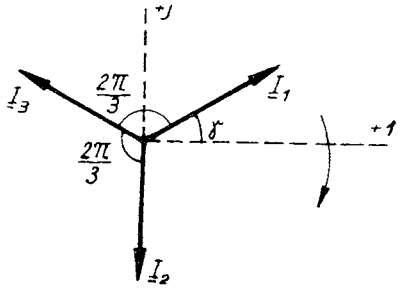


Fig. 21.1

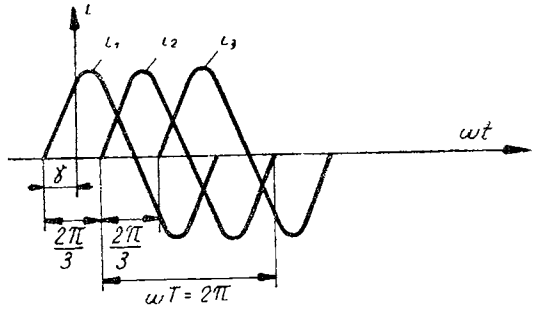


Fig. 21.2

iar în complex ei sînt:

$$\underline{I}_1 = Ie^{j\gamma}; \quad \underline{I}_2 = Ie^{j\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)}; \quad \underline{I}_3 = Ie^{j\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)}. \tag{21.4}$$

Reprezentarea în funcţie de timp a relaţiilor (21.3) este dată în figura 21.2.

Un sistem trifazat simetric invers de curenţi se scrie în valori instantanee:

$$\begin{aligned} i'_1 &= I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \\ i'_2 &= I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ i'_3 &= I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{21.5}$$

Comparînd relaţiile (21.3) şi (21.5) se observă că diferenţa dintre sistemul direct şi cel invers nu are un caracter obiectiv, şi ea depinde de ordonarea mărimilor respective.

Dacă se utilizează notaţia:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{21.6}$$

sistemul trifazat simetric direct poate fi scris sub forma:

$$\underline{I}_1 = Ie^{j\gamma} = \underline{I}; \quad \underline{I}_2 = Ie^{j\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right)} = a^2\underline{I}; \quad \underline{I}_3 = a\underline{I}. \tag{21.7}$$

Operatorul a este un operator de rotaţie. Fazorul $a \cdot \underline{I}$ este rotit cu unghiul $\frac{2\pi}{3}$ în sens trigonometric. Înmulţirea unui fazor cu a^2 îl roteşte în planul complex cu unghiul $\frac{2\pi}{3}$ în sensul acelor de ceasornic (sens invers trigonometric).

Se verifică uşor relaţiile:

$$a = a^4 = a^{-2} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = a^5 = a^{-1} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{21.8}$$

$$a^3 = a^6 = a^0 = e^{j0} = 1$$

şi de asemenea:

$$1 + a + a^2 = 0. \tag{21.9}$$

Numerele complexe, 1, a şi a^2 sînt reprezentate în figura 21.3. Într-un sistem trifazat simetric, se demonstrează imediat relaţia:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}(1 + a + a^2) = 0, \tag{21.10}$$

adică suma fazorilor care reprezintă un sistem simetric (direct sau invers) este nulă. Această relaţie este valabilă şi pentru valorile instantanee ale mărimilor sistemului simetric (relaţia 21.3):

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0. \tag{21.11}$$

În studiul reţelelor trifazate intervine adesea diferenţa a două mărimi din sistemul trifazat, care se calculează în valori instantanee cu relaţia:

$$i_1 - i_2 = I\sqrt{2}\left[\sin(\omega t + \gamma) - \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 2I\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{3} = I\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{6}\right). \tag{21.12}$$

În complex, rezultă:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \underline{I} - a^2\underline{I} = \underline{I}(1 - a^2) = \underline{I}\sqrt{3}\,e^{j\frac{\pi}{6}}. \tag{21.13}$$

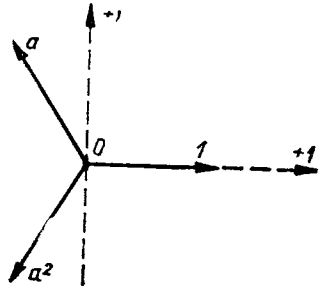


Fig. 21.3

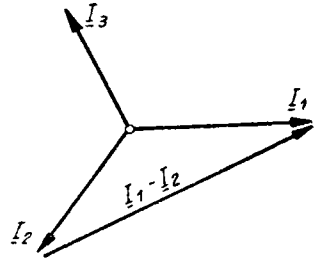


Fig. 21.4

Deci diferența a două mărimi consecutive din sistemul trifazat simetric direct este o mărime avînd valoarea efectivă de $\sqrt{3}$ ori mai mare și defazată înainte cu unghiul $\frac{\pi}{6}$ față de prima mărime (fig. 21.4).

21.2. PRODUCEREA SISTEMULUI TRIFAZAT SIMETRIC DE TENSIUNI ELECTROMOTOARE

Se consideră un sistem de trei spire legate rigid, decalate în spațiu cu unghiul $\frac{2\pi}{3}$ unele față de altele, și care se rotesc cu viteza unghiulară constantă ω, într-un cîmp magnetic constant, de inducție $\vec{B}$ (fig. 21.5). Dacă normala la spira 1 formează un unghi α cu direcția inducției magnetice, fluxul magnetic ce străbate spira va fi:

$$\Phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cos \alpha, \tag{21.14}$$

în care A este suprafața spirei. Tensiunea electromotoare care apare în spiră este:

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = BA \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}. \tag{21.15}$$

Deoarece ansamblul se rotește cu viteza unghiulară $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ constantă, rezultă:

$$\alpha = \omega t + \alpha_0. \tag{21.16}$$

Cu aceste observații, relația (21.15) devine:

$$e_1 = \omega \cdot B \cdot A \sin (\omega t + \alpha_0) = E\sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha_0). \tag{21.17}$$

În cele două spire, decalate cu $\frac{2\pi}{3}$ în urmă și respectiv $\frac{2\pi}{3}$ înaintea primei spire, vor apare tensiunile electromotoare:

$$e_2 = E\sqrt{2} \sin \left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right)$$

și (21.18)

$$e_3 = E\sqrt{2} \sin \left(\omega t + \gamma + \frac{2\pi}{3}\right)$$

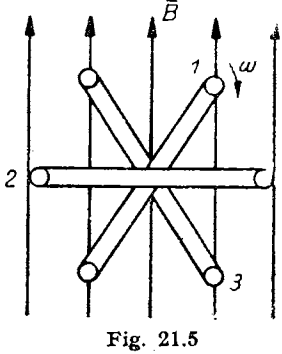


Fig. 21.5

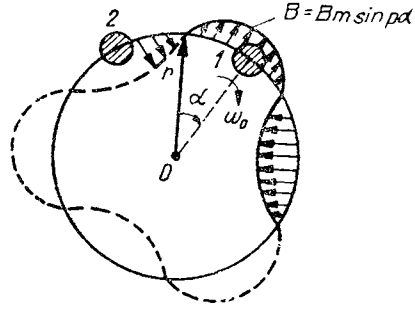


Fig. 21.6

care împreună cu (21.17) formează un sistem simetric de tensiuni electromotoare.

În practică însă, acest procedeu de producere a t.e.m. trifazate este dificil, deoarece este greu de realizat cîmpuri magnetice omogene și suficient de intense în aer. Din acest motiv generatoarele trifazate au o construcție principială ca în figura 21.6. Rotorul la periferia căruia se află conductoarele *1*, *2* etc. se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 într-un cîmp magnetic cu o distribuție sinusoidală la periferia rotorului ($B = B_m \sin p\alpha$).

În conductoare vor apare tensiuni electromotoare, pentru conductorul *1* fiind:

$$e_1 = v \cdot l \cdot B = \omega_0 \cdot r \cdot l \cdot B_m \sin p\alpha, \tag{21.19}$$

în care p este o constantă numită numărul de perechi de poli, egal cu numărul de maxime pozitive ale inducției la periferia rotorului (în cazul desenat, $p = 3$).

Deoarece $\omega_0 = \frac{d\alpha}{dt} = \text{const.}$, rezultă:

$$\alpha = \omega_0 t + \alpha_0' \tag{21.20}$$

și (21.19) devine:

$$e_1 = \omega_0 r \cdot l \cdot B_m \sin (p\omega_0 t + p\alpha_0'). \tag{21.21}$$

Se notează:

$p\omega_0 = \omega$ și $p\alpha_0' = \alpha_0$, iar t.e.m. se scrie:

$$e_1 = E\sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha_0), \tag{21.22}$$

unde:

$$E = \frac{\omega_0 \cdot r \cdot l \cdot B_m}{\sqrt{2}}. \tag{21.23}$$

În conductoarele decalate în urmă sau înainte cu $\frac{2\pi}{3p}$ apar tensiuni electromotoare, care dau împreună cu (21.22) sistemul trifazat.

21.3. CONEXIUNILE SISTEMELOR TRIFAZATE

Se consideră un sistem de trei circuite monofazate independente (fig. 21.7) care conțin tensiunile electromotoare e_1, e_2 și e_3, formînd un sistem trifazat simetric direct:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}\,; \quad \underline{E}_2 = a^2\underline{E}\,; \quad \underline{E}_3 = a\underline{E} \tag{21.24}$$

și alimentează trei impedanțe identice:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Ze^{j\varphi}. \tag{21.25}$$

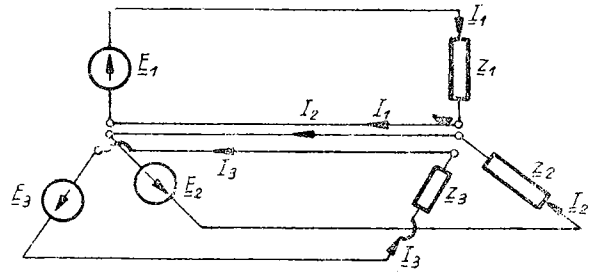


Fig. 21.7

Curenţii produşi în cele trei impedanţe, în complex, vor fi:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} \cdot a^2; \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} a. \tag{21.26}$$

Sistemul trifazat reprezentat în figura 21.7 este un sistem neconectat şi pentru transportul energiei de la sursă la consumator (impedanţele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$) sînt necesare 6 conductoare. Sistemul poate fi conectat. Conectarea sistemelor trifazate se poate efectua în două moduri: în stea sau în triunghi.

Conexiunea în stea este reprezentată în figura 21.8. Conductoarele desenate cu linie plină se numesc conductoare de linie şi mărimile corespunzătoare acestora se numesc *mărimi de linie (tensiune de linie, curent de linie* etc.). Conductorul desenat cu linie întreruptă se numeşte conductor de *nul* sau *neutru*. Punctele O şi O' sînt punctele *neutre* ale generatorului şi respectiv receptorului. Impedanţele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ şi $\underline{Z}_3$ se numesc fazele receptorului. Tensiunile măsurate la bornele acestor impedanţe se numesc *tensiuni de fază*, iar curenţii care le străbat se numesc *curenţi de fază*.

În cazul conectării în stea se poate face următoarea observaţie importantă: curentul care circulă prin firul neutru

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \tag{21.27}$$

este nul în cazul sistemului trifazat care debitează pe un receptor trifazat echilibrat (cele trei impedanţe sînt identice), conform relaţiei (21.26), deci firul neutru poate lipsi.

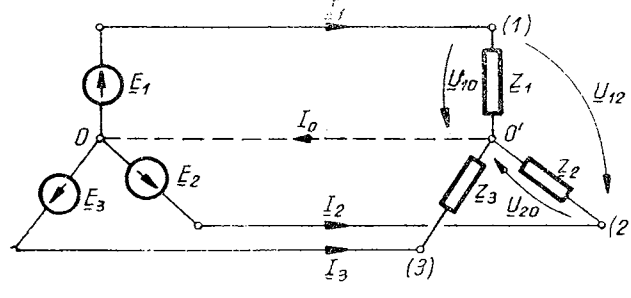


Fig. 21.8

În acest caz transmiterea energiei în sistemele trifazate conectate în stea se poate face numai cu 3 conductoare, spre deosebire de sistemele neconectate (fig. 21.7) unde erau necesare 6 conductoare.

Notînd valorile efective ale mărimilor de linie prin: I_l — curentul de linie; U_l — tensiunea de linie, iar valorile efective ale mărimilor de fază prin: I_f — curentul de fază; U_f — tensiunea de fază, se pot stabili următoarele relații la conectarea în stea:

$$I_l = I_f \tag{21.28}$$

$$U_l = \sqrt{3}U_f. \tag{21.29}$$

Prima relație rezultă imediat aplicînd teorema întîi a lui Kirchhoff nodului (1).

Tensiunea de linie este de exemplu tensiunea $\underline{U}_{12}$ din figura 21.8. Cum însă $\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}$, și acestea din urmă formează un sistem simetric direct, rezultă cu (21.13) relația (21.29).

Conexiunea în triunghi este prezentată în figura 21.9. Această conexiune nu poate avea fir neutru. Transportul energiei se face cu trei conductoare. S-ar părea, la prima vedere, că în ochiul (*a*), (*b*), (*c*), al rețelei ar putea circula un curent intens produs de suma $\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3$, dar cum sistemul trifazat de tensiuni electromotoare este simetric, această sumă este nulă.

La legarea în triunghi există relațiile:

$$U_l = U_f \tag{21.30}$$

(tensiunea de linie este egală cu cea de fază) și

$$I_l = \sqrt{3}I_f. \tag{21.31}$$

Relația (21.31) rezultă din aplicarea teoremei întîi a lui Kirchhoff, de exemplu nodului (*2*):

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}, \tag{21.32}$$

unde curentul de fază este $I_f = |\underline{I}_{23}| = |\underline{I}_{12}|$, iar curentul de linie este $I_l = |\underline{I}_2|$. Ținînd cont de faptul că curenții $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$ și $\underline{I}_{31}$, formează un sistem simetric, relația (21.13) conduce la (21.31).

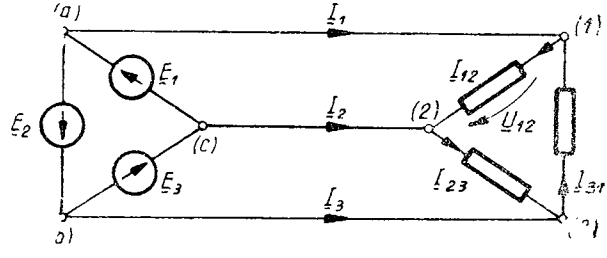


Fig. 21.9

Sistemele trifazate sînt foarte mult utilizate în mașinile electrice, unde produc cum se va vedea, cîmpuri magnetice care se rotesc în spațiu. Cîmpurile magnetice rotitoare stau la baza funcționării tuturor motoarelor sincrone și asincrone.

21.4.1. Vectorul cîmp magnetic rotitor

Un cîmp magnetic, caracterizat prin vectorul inducției magnetice $\overline{B}$ este rotitor, dacă acest vector își păstrează modulul constant și se rotește în spațiu cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 21.10). Proiecțiile acestui vector pe cele două axe sînt:

$$B_x = B \sin \omega t$$

$$B_y = B \cos \omega t \tag{21.33}$$

Acest vector, după cum se vede, se rotește în sens direct (sensul acelor de ceasornic). Se demonstrează în cele ce urmează că un sistem trifazat de curenți sinusoidali pot produce un cîmp magnetic rotitor. Pentru aceasta se consideră (fig. 21.11) trei spire plate care sînt dispuse în spațiu la unghiuri de $\frac{2\pi}{3}$ unele față de altele și sînt parcurse de curenții sinusoidali:

$$i_1 = I\sqrt{2}\sin \omega t$$

$$i_2 = I\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{21.34}$$

$$i_3 = I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

care formează un sistem trifazat simetric direct. Acești curenți, trecînd

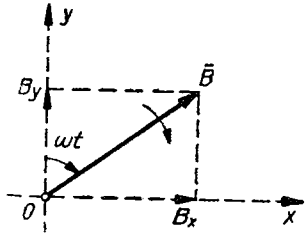


Fig. 21.10

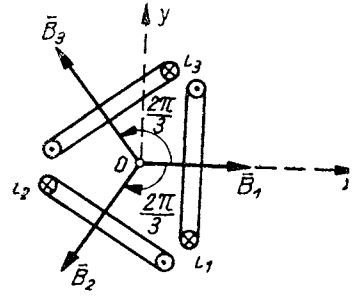


Fig. 21.11

prin cele trei spire identice, produc fiecare în parte, în punctul O, inducțiile magnetice:

$$B_1 = B_m \sin \omega t$$
$$B_2 = B_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \tag{21.35}$$
$$B_3 = B_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

variabile în timp, și dirijate normal pe axele spirelor, după regula burghiului drept, așa cum este arătat în figură. Aceste trei inducții se compun, dînd naștere unei inducții rezultante $\overline{B}$, care are componentele:

$$B_x = B_1 + B_2 \cos \frac{2\pi}{3} + B_3 \cos \frac{2\pi}{3} = B_m \sin \omega t - \frac{1}{2}\left[B_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + B_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \sin \omega t \tag{21.36}$$

$$B_y = B_3 \sin \frac{2\pi}{3} - B_2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[B_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \right.$$
$$\left. - B_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{3}{2} B_m \cos \omega t. \tag{21.37}$$

Comparînd cu relațiile (21.33), rezultă că prin acest procedeu se obține o inducție magnetică egală cu $\frac{3}{2} B_m$ care se rotește în spațiu, în sens direct, cu viteza unghiulară ω.

21.4.2. Cîmp magnetic radial, cu repartiție sinusoidală în spațiu, rotitor

Cîmpul magnetic radial, cu repartiție sinusoidală în spațiu este reprezentat aproximativ în figura 21.6. Vectorul inducției magnetice este dirijat după direcție radială, avînd variația sinusoidală în funcție de unghiul α.

În mașinile electrice, distribuția sinusoidală a inducției magnetice în întrefierul δ, care separă partea fixă a mașinii (statorul) de partea ei mobilă (rotorul) se realizează prin aranjarea convenabilă a înfășurărilor în crestăturile longitudinale ale statorului (fig. 21.12). Pentru explicarea simplificată a fenomenelor se consideră o mașină electrică avînd 12 crestături. În crestături se află conductoarele care formează două cîte două cîte o spiră. Fiecare din cele trei spire (reprezentate în figura 21.12) produce cîte o inducție magnetică, care în întrefier se vor suprapune, dînd naștere unei inducții rezultante cu variația în trepte, ca în figura 21.13 (reprezentarea desfășurată a întrefierului). Această variație în trepte a inducției magnetice din intrefier poate fi aproximată cu o sinusoidă (curba

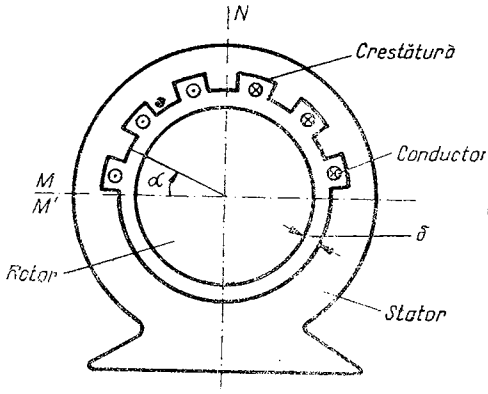


Fig. 21.12

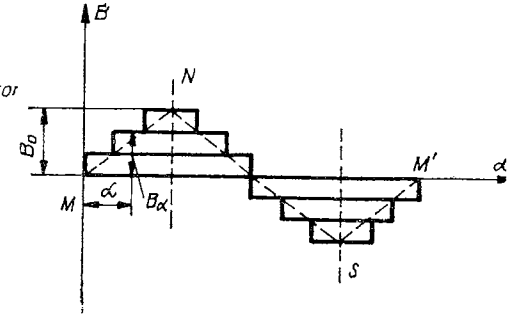


Fig. 21.13

punctată din figura 21.13), avînd valoarea maximă B_0, astfel încît inducţia magnetică la un unghi oarecare α va fi dată de expresia:

$$B_\alpha = B_0 \sin \alpha. \tag{21.38}$$

Dacă prin înfăşurări va trece un curent alternativ de forma:

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t, \tag{21.39}$$

inducţia magnetică B_0 va avea aceeaşi variaţie sinusoidală:

$$B_0 = B_m \sin \omega t. \tag{21.40}$$

Rezultă variaţia inducţiei magnetice în întrefier, pentru un unghi α, sub forma:

$$B_\alpha = B_m \sin \omega t \cdot \sin \alpha. \tag{21.41}$$

Cîmpul magnetic pentru care inducţia are forma de variaţie (21.41) se numeşte cîmp *magnetic pulsatoriu,* deoarece conform relaţiei (21.40) inducţia magnetică în dreptul polului nord (N în fig. 21.12 şi 21.13) variază periodic în timp.

Dacă într-o maşină electrică se suprapun trei cîmpuri magnetice pulsatorii care sînt decalate pe periferia rotorului cu un unghi $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ şi sînt produse de trei curenţi sinusoidali ce formează un sistem trifazat direct (de forma 21.34), deci defazaţi în timp cu unghiuri $\frac{2\pi}{3}$, se obţine un cîmp magnetic rezultant cu o repartiţie a vectorului inducţiei magnetice sinusoidală în spaţiu (în întrefier) şi care se roteşte cu viteza unghiulară ω.

Curenţii sistemului trifazat produc cele trei inducţii pulsatorii de forma (21.41):

$$\begin{aligned} B_{1\alpha} &= B_m \sin \omega t \sin \alpha \\ B_{2\alpha} &= B_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \\ B_{3\alpha} &= B_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{21.42}$$

Suma lor este:

$$B_\alpha = B_{1\alpha} + B_{2\alpha} + B_{3\alpha} = B_m\left[\sin \omega t \cdot \sin \alpha + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{3}{2} B_m \cos(\omega t - \alpha). \tag{21.43}$$

Acesta este un cîmp magnetic cu distribuţie sinusoidală în spaţiu (în funcţie de α) şi rotitor, deoarece valoarea sa rămîne constantă în timp dacă

$$\omega t - \alpha = \text{const.} \tag{21.44}$$

Viteza de rotaţie a cîmpului este

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \tag{21.45}$$

adică se roteşte în sens direct (în sensul creşterii unghiului α) cu viteza unghiulară ω.

În figura 21.14 este reprezentată relaţia (21.43) pentru un timp $t_0 = 0$ şi pentru un timp $t_1 = \Delta t$.

După timpul Δt, axa polului nord s-a deplasat cu un unghi $\Delta\alpha = \omega\Delta t$ (conform relaţiei 21.44)

Cîmpul rotitor în sens invers este caracterizat de relaţia:

$$\omega t + \alpha = \text{const.} \tag{21.46}$$

şi el se poate obţine cu un sistem trifazat de curenţi de succesiune inversă, avînd deci forma:

$$\begin{aligned} i_1 &= I\sqrt{2} \sin \omega t \\ i_2 &= I\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 &= I\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{21.47}$$

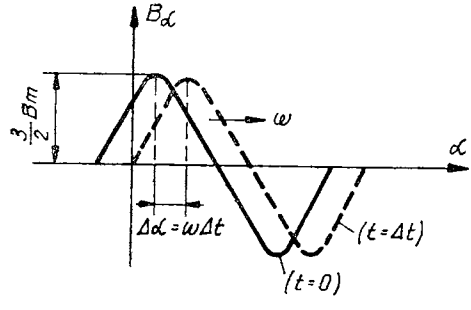


Fig. 21.14

CAPITOLUL 22

REZOLVAREA CIRCUITELOR ELECTRICE TRIFAZATE

În acest capitol se urmărește determinarea curenților din rețeaua trifazată, cînd se cunosc sistemul trifazat de tensiuni, precum și cele trei impedanțe ale receptorului conectate în stea sau în triunghi. Noțiunea de *sistem simetric* sau *sistem nesimetric* se referă la sistemul trifazat de tensiuni sau de curenți. Un sistem trifazat de tensiuni sau de curenți este *simetric*, dacă cei trei fazori reprezentativi sînt egali în modul și egal defazați între ei cu unghiul $\frac{2\pi}{3}$. La conectarea în stea, fazorii reprezentativi ai sistemului trifazat simetric formează o stea simetrică, iar la conectarea în triunghi fazorii formează un triunghi echilateral.

Noțiunea de *receptor trifazat echilibrat* sau *dezechilibrat* se referă la cele trei impedanțe de sarcină ale receptorului. Un receptor trifazat este echilibrat dacă cele trei impedanțe ale sale (conectate în stea sau în triunghi) sînt identice, adică în complex au același modul Z și același argument φ.

În funcție de aceste precizări, pot exista cazurile date în tabelul 22.1.

Tabelul 22.1.

Fiind date:		Rezultă
Sistemul de tensiuni	Receptorul	Sistemul de curenți
Simetric	Echilibrat	Simetric
Simetric	Dezechilibrat	Nesimetric
Nesimetric	Echilibrat	Nesimetric
Nesimetric	Dezechilibrat	Nesimetric

Numai într-un singur caz (sistemul de tensiuni este simetric și receptorul este echilibrat) rezultă sistemul de curenți simetric.

22.1. REZOLVAREA CIRCUITELOR TRIFAZATE ECHILIBRATE, ALIMENTATE CU UN SISTEM SIMETRIC DE TENSIUNI

22.1.1. Receptoare trifazate echilibrate în stea

La receptoarele conectate în stea, există posibilitatea de a se lega împreună nulul receptorului O' cu nulul generatorului O, conform schemei din figura 22.1. Se dau tensiunile de alimentare (tensiuni de fază), care

formează un sistem trifazat simetric direct:

$$\underline{U}_1 = U_f\,;\quad \underline{U}_2 = a^2 U_f\,;\quad \underline{U}_3 = aU_f, \tag{22.1}$$

iar impedanţele celor trei faze sînt identice (receptorul este echilibrat):

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Z\,e^{j\varphi}. \tag{22.2}$$

Se presupune că impedanţa conductorului de nul este $\underline{Z}_0$, iar tensiunea între nuluri este $\underline{U}_0$. Curenţii pe cele trei faze vor fi daţi de relaţiile:

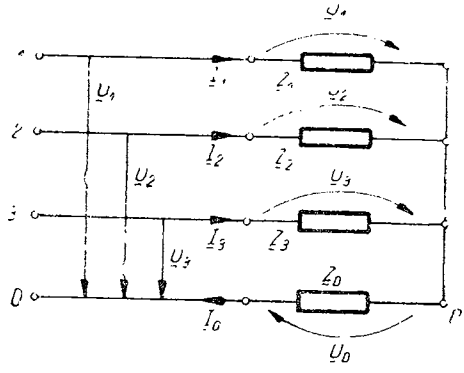


Fig. 22.1

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}'_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_f - \underline{U}_0}{\underline{Z}}\,;\quad \underline{I}_2 = \frac{a^2 U_f - \underline{U}_0}{\underline{Z}}\,;\quad \underline{I}_3 = \frac{aU_f - \underline{U}_0}{\underline{Z}}. \tag{22.3}$$

Aplicînd teorema întîi a lui Kirchhoff nodului O', se poate scrie:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = \underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_2. \tag{22.4}$$

Se arată că atît tensiunea $\underline{U}_0$ cît şi curentul $\underline{I}_0$ sînt nuli în situaţia prezentată mai sus. Adunînd relaţiile (22.3) şi ţinînd cont de (22.4) rezultă:

$$\frac{1}{\underline{Z}}\left[(1 + a^2 + a)\,U_f - 3U_0\right] = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0}. \tag{22.5}$$

Deoarece $1 + a^2 + a = 0$ (vezi relaţia 21.9), rezultă:

$$\underline{U}_0\left(\frac{3}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}_0}\right) = 0, \tag{22.6}$$

care conduce la $\underline{U}_0 = 0$, deoarece $\underline{Z}$ şi $\underline{Z}_0$ sînt mărimi finite. Din (22.4) rezultă apoi $\underline{I}_0 = 0$.

Curenţii, din (22.3), vor fi deci:

$$\underline{I}_1 = \frac{U_f}{\underline{Z}}\,;\quad \underline{I}_2 = a^2\frac{U_f}{\underline{Z}}\,;\quad \underline{I}_3 = a\frac{U_f}{\underline{Z}}\,, \tag{22.7}$$

deci formează un sistem simetric. Reprezentarea fazorială a tensiunilor şi curenţilor este dată în figura 22.2.

Din cele prezentate, rezultă că în cazul unui receptor trifazat echilibrat în stea, alimentat cu un sistem simetric de tensiuni, legătura de nul poate să lipsească, iar curenţii pe fiecare fază (relaţia 22.7) se pot

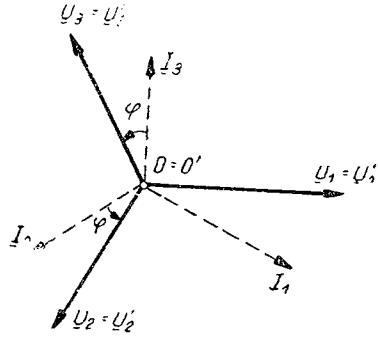


Fig. 22.2

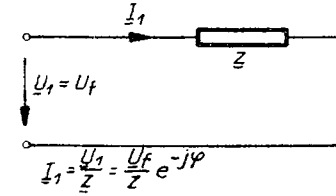


Fig. 22.3

calcula ca și într-un circuit monofazat (fig. 22.3) căruia i se aplică tensiunea de fază (măsurată între o fază și nul), deci:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_f}{Z} e^{-j\varphi}.$$

Se consideră acum (fig. 22.4, *a*) că receptorul echilibrat în stea are impedanțele de cuplaj între faze $\underline{Z}_M$. Aplicînd teorema a doua a lui Kirchhoff ochiurilor indicate pe figură, se obțin ecuațiile:

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2 - \underline{Z} \underline{I}_2 - \underline{Z}_M \underline{I}_1 = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_1 - (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_2 \tag{22.8}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \underline{I}_3 - \underline{Z} \underline{I}_3 - \underline{Z}_M \underline{I}_2 = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_2 - (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\underline{I}_3. \tag{22.9}$$

Aceste ecuații corespund schemei echivalente din figura 22.4, *b*. Adică, receptorul în stea avînd impedanța proprie pe fază $\underline{Z}$ și impedanța de cuplaj $\underline{Z}_M$ este echivalent cu un receptor în stea, fără cuplaje între faze, avînd impedanța echivalentă pe fază:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z} - \underline{Z}_M. \tag{22.10}$$

Deoarece receptorul echivalent este echilibrat, curenții prin fazele receptorului vor forma un sistem trifazat simetric și ei se calculează acum cu relații de tipul (22.7), în care impedanța este dată de (22.10).

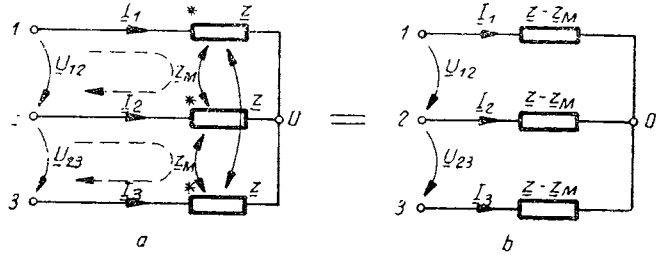


Fig. 22.4

22.1.2. **Receptoare trifazate echilibrate în triunghi** (fig. 22.5)

Se dau tensiunile de linie (vezi paragraful 21.3) $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$, care formează un sistem simetric:

$$\underline{U}_{12} = U_l; \quad \underline{U}_{23} = a^2 U_l; \quad \underline{U}_{31} = aU_l \tag{22.11}$$

și impedanțele celor trei faze ale receptorului (identice):

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z} = Ze^{j\varphi}. \tag{22.12}$$

Se cer curenții $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ prin impedanțele receptorului (curenți de fază) precum și curenții $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ debitați de surse (curenți de linie).

Curenții prin cele trei faze ale receptorului se determină imediat în funcție de tensiunile de linie care sînt aplicate direct impedanțelor receptorului:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{U_l}{Z} e^{-j\varphi}; \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = a^2 \frac{U_l}{Z} e^{-j\varphi}; \quad \underline{I}_{31} = a \frac{U_l}{Z} e^{-j\varphi} \tag{22.13}$$

Curenții de linie se determină aplicînd teorema întîi a lui Kirchhoff în cele trei noduri ale receptorului:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = (1 - a) \frac{U_l}{Z} e^{-j\varphi} = \sqrt{3} \frac{U_l}{Z} e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)} \tag{22.14}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = (a^2 - 1) \frac{U_l}{Z} e^{-j\varphi} = a^2 \sqrt{3} \frac{U_l}{Z} e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)} \tag{22.15}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = (a - a^2) \frac{U_l}{Z} e^{-j\varphi} = a(1 - a) \frac{U_l}{Z} e^{-j\varphi} = a\sqrt{3} \frac{U_l}{Z} e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)} \tag{22.16}$$

Atît curenții de linie cît și curenții de fază formează sisteme trifazate simetrice. Între valorile efective există relațiile:

$$|\underline{I}_1| = \sqrt{3}\, |\underline{I}_{12}|, \text{ adică } I_l = \sqrt{3} I_f. \tag{22.17}$$

Diagrama fazorială a tensiunilor și a curenților, luînd origine de fază tensiunea $\underline{U}_{12} = U_l$ este dată în figura 22.6.

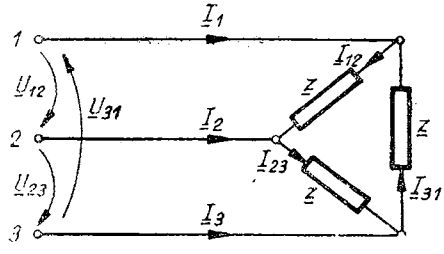


Fig. 22.5

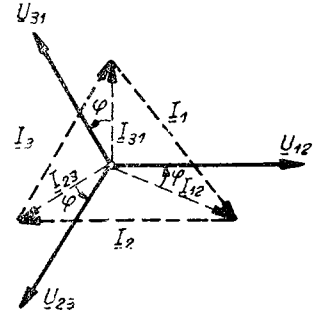


Fig. 22.6

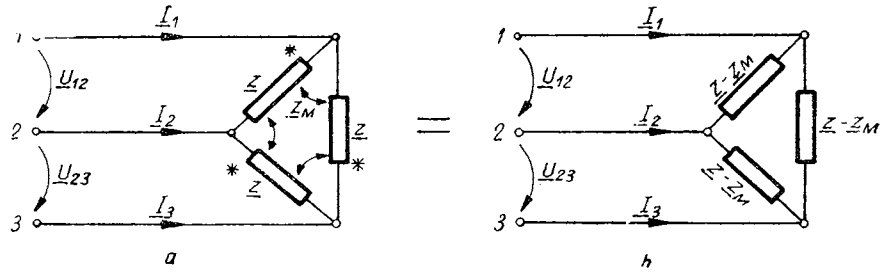


Fig. 22.7

Ca şi în cazul conectării în stea, un receptor trifazat cu conexiunea în triunghi, avînd cuplaje magnetice între faze, admite o schemă echivalentă în triunghi, în care impedanţele echivalente ale fazelor (fig. 22.7) sînt egale şi date de relaţia:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z} - \underline{Z}_M. \tag{22.18}$$

22.1.3. Puteri în reţele trifazate echilibrate

De exemplu, pentru receptorul trifazat în stea (fig. 22.1) puterea aparentă complexă absorbită de cele trei faze (pe impedanţa nulului nu se consumă putere, deoarece $\underline{I}_0 = 0$ şi $\underline{U}_0 = 0$) este:

$$\underline{S} = U_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \cdot \underline{I}_3^*. \tag{22.19}$$

Curenţii complecşi conjugaţi sînt din (22.7):

$$\underline{I}_1^* = \frac{U_f}{\underline{Z}^*} = \frac{U_f}{Z} e^{j\varphi}; \quad \underline{I}_2^* = \left(a^2 \frac{U_f}{\underline{Z}}\right)^* = a \frac{U_f}{\underline{Z}^*} = a \frac{U_f}{Z} e^{j\varphi}; \quad \underline{I}_3^* = a^2 \frac{U_f}{Z} e^{j\varphi}. \tag{22.20}$$

Introducînd (22.20) şi (22.1) în (22.19), rezultă:

$$\underline{S} = U_f \cdot I_f e^{j\varphi} + a^3 U_f I_f e^{j\varphi} + a^3 U_f I_f e^{j\varphi}. \tag{22.21}$$

Cum însă $a^3 = 1$, rezultă că cei trei termeni ai relaţiei sînt egali între ei, deci:

$$\underline{S} = 3U_f I_f e^{j\varphi} = 3U_f I_f \cos\varphi + j3U_f I_f \sin\varphi. \tag{22.22}$$

Mărimile U_f şi I_f sînt tensiunea şi respectiv curentul de fază.

Relaţia (22.22) dă puterea activă şi puterea reactivă a sistemului trifazat:

$$P = 3U_f I_f \cos\varphi; \quad Q = 3U_f I_f \sin\varphi. \tag{22.23}$$

Puterea activă se poate deci măsura cu un singur wattmetru conectat ca în figura 22.8, pe o singură fază a reţelei, şi deviaţia instrumentului se va înmulţi cu trei.

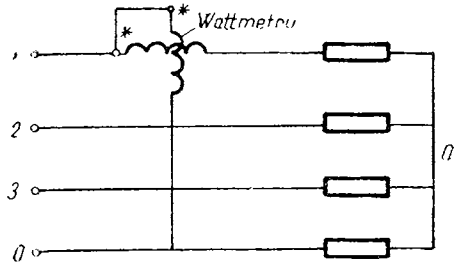


Fig. 22.8

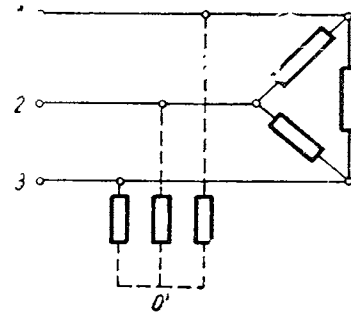


Fig. 22.9

Dacă se utilizează relațiile între mărimile de linie și mărimile de fază (relațiile 21.30 și 21.31), puterile în sistemul trifazat (din 22.23) se pot calcula cu relațiile:

$$P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi \; ; \quad Q = \sqrt{3}\, U_l I_l \sin \varphi \tag{22.24}$$

Deoarece conform teoremelor de transfigurare, orice receptor în stea admite o schemă echivalentă în triunghi, relațiile (22.24) sînt valabile atît în rețelele echilibrate conectate în stea, cît și în rețelele echilibrate conectate în triunghi.

În cazul receptorului în triunghi, deoarece nu există punct neutru ca la receptorul în stea, se realizează un „nul artificial" cu ajutorul a trei impedanțe identice (fig. 22.9), pentru a se putea amplasa instrumentul de măsură (wattmetru).

22.2. REZOLVAREA CIRCUITELOR TRIFAZATE DEZECHILIBRATE, ALIMENTATE DE LA UN SISTEM NESIMETRIC DE TENSIUNI

Calculul circuitelor trifazate dezechilibrate se face în principal utilizînd teoremele lui Kirchhoff, fără alte metode speciale.

Dacă neutrul O al generatorului este accesibil, se presupune în general că se cunosc tensiunile $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ între cele trei faze și acest nul, care formează un sistem nesimetric, deci este valabilă inegalitatea:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 \neq 0. \tag{22.25}$$

Pentru tensiunile de linie este însă stisfăcută egalitatea evidentă:

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0, \tag{22.26}$$

indiferent dacă sistemul este simetric sau nu.

În cazul cînd nulul O al generatorului nu este accesibil, se presupune că se cunosc tensiunile de linie $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$, care satisfac egalitatea (22.26).

Totuşi se poate alege arbitrar un punct „neutru artificial" (ca în fig. 22.9) care în unele cazuri poate coincide cu una din bornele sursei de alimentare. Tensiunile măsurate între cele trei faze şi „nulul artificial" se numesc tensiuni auxiliare.

22.2.1. Teorema potenţialului punctului neutru

Considerăm receptorul dezechilibrat din figura 22.10 alimentat de la reţea cu nul accesibil. Sînt evidente relaţiile:

$$\underline{U}_1' = \underline{U}_1 - \underline{U}_0; \quad \underline{U}_2' = \underline{U}_2 - \underline{U}_0; \quad \underline{U}_3' = \underline{U}_3 - \underline{U}_0. \tag{22.27}$$

Aplicînd teorema întîi a lui Kirchhoff nodului O' rezultă:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0 = \underline{U}_0\underline{Y}_0. \tag{22.28}$$

Din legea lui Ohm, curenţii celor trei faze sînt:

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1' \cdot \underline{Y}_1 = (\underline{U}_1 - \underline{U}_0)\underline{Y}_1; \quad \underline{I}_2 = (\underline{U}_2 - \underline{U}_0)\underline{Y}_2;$$
$$\underline{I}_3 = (\underline{U}_3 - \underline{U}_0)\underline{Y}_3. \tag{22.29}$$

Adunînd relaţiile (22.29) şi ţinînd cont de (22.28), se obţine teorema potenţialului punctului neutru:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_0 + \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \tag{22.30}$$

Această teoremă stă la baza rezolvării tuturor circuitelor trifazate cu receptorul în stea, indiferent dacă generatorul are sau nu neutrul accesibil. De exemplu (fig. 22.11), dacă nulul nu este accesibil, se alege arbitrar ca „neutru artificial" punctul O. În acest caz, în relaţia (22.30) rezultă $Y_0 = 0$, deci:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \tag{22.31}$$

Alegerea arbitrară a neutrului artificial O se face în practică astfel încît să existe o exprimare uşoară a mărimilor $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ şi $\underline{U}_3$ (care intervin

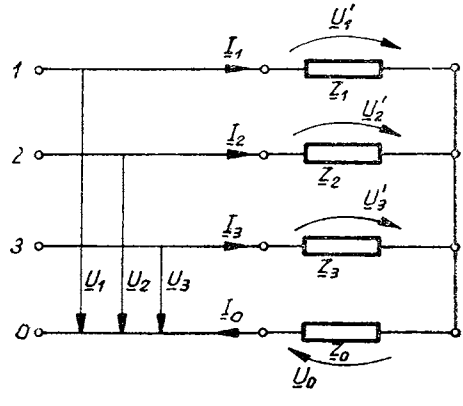


Fig. 22.10

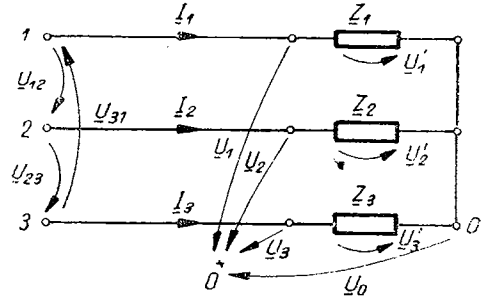


Fig. 22.11

în relația 22.31) în funcție de datele problemei (adică în funcție de $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ și $\underline{U}_{31}$). Se poate alege drept neutru artificial punctul *2* din figura 22.11.

În acest caz se pot scrie relațiile:

$$\underline{U}_2 = 0; \quad \underline{U}_1 = \underline{U}_{12}; \quad \underline{U}_3 = -\underline{U}_{23}, \tag{22.32}$$

și (22.31) devine:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_1 - \underline{U}_{23}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \tag{22.33}$$

Tensiunile la bornele impedanțelor vor fi (din 22.27 și 22.33):

$$\underline{U}'_1 = \underline{U}_1 - \underline{U}_0 = \underline{U}_{12} - \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_1 - \underline{U}_{23}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_2 - \underline{U}_{31}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}, \tag{22.34}$$

$$\underline{U}'_2 = \underline{U}_2 - \underline{U}_0 = -\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_{23}\underline{Y}_3 - \underline{U}_{12}\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}, \tag{22.35}$$

$$\underline{U}'_3 = \underline{U}_3 - \underline{U}_0 = -\underline{U}_{23} - \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_1 - \underline{U}_{23}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\underline{U}_{31}\underline{Y}_1 - \underline{U}_{23}\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \tag{22.36}$$

Curenții în cele trei faze se calculează aplicînd apoi legea lui Ohm (în deducerea relațiilor 22.34 și 22.36 s-a ținut cont de relația evidentă: $\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$).

Exemplu

Se consideră receptorul în stea din figura 22.12, avînd pe fazele *1* și *2* cîte o lampă cu incandescență, iar pe faza *3* un condensator. Dacă rezistența lămpilor este egală cu reactanța condensatorului $\left(R_1 = R_2 = R = \frac{1}{\omega C}\right)$, se cere să se determine raportul valorilor efective ale curenților din fazele *1* și *2*, știind că tensiunile de alimentare formează un sistem simetric: $\underline{U}_{23} = a^2\underline{U}_{12}$; $\underline{U}_{31} = a\underline{U}_{12}$.

Admitanțele receptorului sînt:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{R}; \quad \underline{Y}_3 = j\omega C = j\frac{1}{R}. \tag{22.37}$$

Tensiunile la bornele celor două lămpi (relațiile 22.34 și 22.35) sînt:

$$\underline{U}'_1 = \frac{\underline{U}_{12}\frac{1}{R} - a\underline{U}_{12}j\frac{1}{R}}{\frac{2}{R} + j\frac{1}{R}} = \underline{U}_{12}\frac{1 - aj}{2 + j} \tag{22.38}$$

$$\underline{U}'_2 = \frac{a^2\underline{U}_{12}\frac{1}{R}j - \underline{U}_{12}\frac{1}{R}}{\frac{2}{R} + j\frac{1}{R}} = \underline{U}_{12}\frac{ja^2 - 1}{2 + j}. \tag{22.39}$$

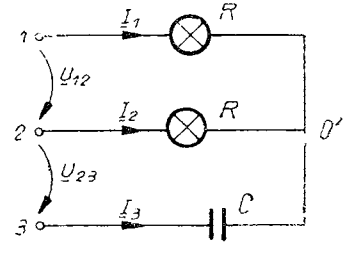


Fig. 22.12

Deoarece lămpile au aceeaşi rezistenţă, raportul curenţilor este egal cu raportul tensiunilor, deci:

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{1 - aj}{ja^2 - 1} = \frac{1 - j\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{j\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1} = \frac{2 + \sqrt{3} + j}{-2 + \sqrt{3} - j}. \tag{32.40}$$

Raportul valorilor efective rezultă:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2 + \sqrt{3} \cong 3{,}73, \tag{22.41}$$

adică lampa de pe faza întîi este mai luminoasă decît lampa de pe faza a doua. Acest dispozitiv se utilizează în practică pentru indicarea ordinii de succesiune a fazelor. Succesiunea fazelor este în ordinea: lampa aprinsă puternic, lampa aprinsă slab, condensatorul.

22.2.2. Receptor dezechilibrat în triunghi (fig. 22.13)

Şi în acest caz sînt date tensiunile de linie, care formează un sistem nesimetric, dar satisfac relaţia: $\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$. Cum aceste tensiuni se aplică direct impedanţelor laturilor triunghiului, curenţii din laturi (curenţi de fază) sînt:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}; \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}; \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}, \tag{22.42}$$

iar curenţii de linie sînt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} \tag{22.43}$$

Exemplu

Să se rezolve circuitul din figura 22.14, avînd:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \frac{1}{j\omega C}, \quad \underline{Z}_{31} = j\omega L = \frac{1}{2\omega C} j, \tag{22.44}$$

căruia i se aplică tensiunile simetrice de succesiune directă:

$$\underline{U}_{12}; \quad \underline{U}_{23} = a^2\underline{U}_{12}; \quad \underline{U}_{31} = a\underline{U}_{12}. \tag{22.45}$$

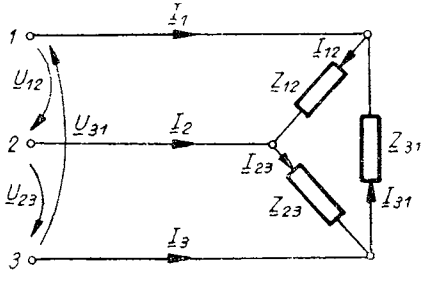


Fig. 22.13

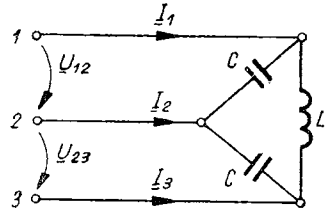


Fig. 22.14

Cu relațiile (22.42) ÷ (22.45), se obțin curenții de linie:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} - \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \underline{U}_{12}(j\omega C + 2aj\omega C) = -\omega C\sqrt{3}\underline{U}_{12} \tag{22.46}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_{12}(a^2 j\omega C - j\omega C) = -a\omega C\sqrt{3}\underline{U}_{12} \tag{22.47}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U}_{12}(-2ja\omega C - ja^2\omega C) = -a^2\omega C\sqrt{3}\underline{U}_{12}. \tag{22.48}$$

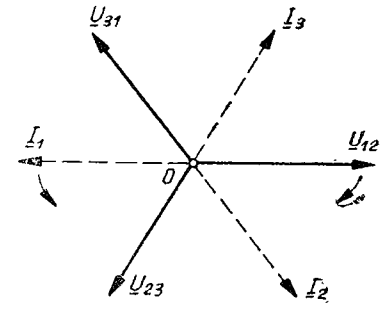


Fig. 22.15

Este interesant de observat că în receptorul prezentat, sistemul de tensiuni este simetric direct, iar sistemul de curenți, conform relațiilor (22.46) ÷ (22.48), rezultă simetric (deși receptorul este dezechilibrat), dar de succesiune inversă. În figura 22.15 este dată diagrama fazorială a tensiunilor $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ și a curenților de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$, în care s-a luat origine de fază tensiunea $\underline{U}_{12}$.

Observații

a) Dacă impedanțele liniei de transport nu pot fi neglijate, ele se includ (în serie) în impedanțele receptorului în stea. La receptorul în triunghi (fig. 22.16, *a*) se efectuează transfigurarea în stea (fig. 22.16, *b*) și se procedează apoi ca mai sus; rezolvarea este dată în ambele cazuri apoi de teorema potențialului punctului neutru.

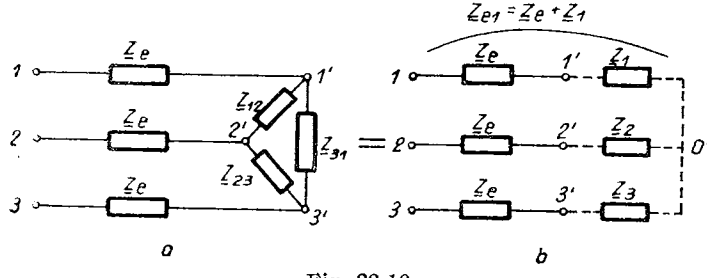


Fig. 22.16

b) Dacă există cuplaje între impedanțele fazelor, metodele prezentate mai sus nu sînt, în general, valabile și trebuiesc utilizate teoremele lui Kirchhoff.

c) În cazul mai multor receptoare dezechilibrate în stea, nulurile stelelor în general nu se află la același potențial, deci laturile omoloage nu pot fi considerate ca fiind legate în paralel. Se efectuează o transformare a tuturor stelelor în triunghi și în acest caz laturile omoloage ale triunghiurilor sînt legate în paralel, deci se poate găsi o schemă echivalentă în triunghi pentru toată rețeaua.

22.2.3. Puteri în rețele trifazate dezechilibrate

În cazul rețelelor de transmisie a energiei cu fir neutru, zise „cu patru fire" (fig. 22.17), puterea complexă este:

$$\underline{S} = \underline{U}_1\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^*. \tag{22.49}$$

Puterile pe cele trei faze nu mai sînt egale între ele. Puterea activă este:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 \qquad (22.50)$$

iar cea reactivă este:

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3, \qquad (22.51)$$

unde φ_1, φ_2, şi φ_3 sînt unghiurile de defazaj între perechile de mărimi $\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$; $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$ şi $\underline{U}_3$, $\underline{I}_3$.

Expresia (22.50) a puterii active corespunde măsurării ei cu ajutorul a trei wattmetre (fig. 22.17), obţinîndu-se puterea sistemului trifazat ca suma celor trei puteri indicată de fiecare wattmetru în parte.

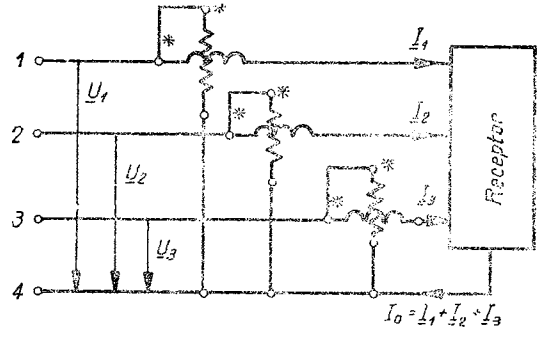


Fig. 22.17

În cazul reţelelor de transmisie fără fir neutru, zise „cu trei fire" (fig. 22.18), deoarece avem îndeplinită condiţia:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \qquad \text{sau} \qquad \underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^* = 0, \qquad (22.52)$$

expresia puterii complexe se poate pune sub forma:

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2(-\underline{I}_1^* - \underline{I}_3^*) + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{32} \underline{I}_3^*, \qquad (22.53)$$

avînd componentele:

$$P = U_{12} I_1 \cos (\underline{U}_{12}, \underline{I}_1) + U_{32} I_3 \cos (\underline{U}_{32}, \underline{I}_3) \qquad (22.54)$$

$$Q = U_{12} I_1 \sin (\underline{U}_{12}, \underline{I}_1) + U_{32} I_3 \sin (\underline{U}_{32}, \underline{I}_3). \qquad (22.55)$$

Expresia (22.54) corespunde măsurării puterii active în acest caz numai cu două wattmetre (fig. 22.18).

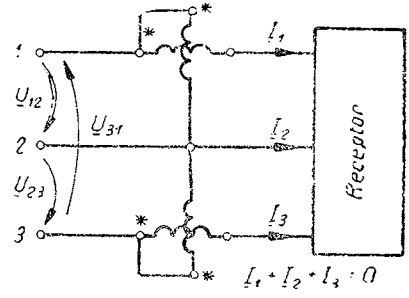


Fig. 22.18

CAPITOLUL 23

METODA COMPONENTELOR SIMETRICE

Această metodă constă în descompunerea unui sistem trifazat nesimetric în trei sisteme trifazate simetrice, numite componente simetrice şi apoi în suprapunerea regimurilor de funcţionare produse de fiecare sistem simetric în parte. Ea se poate aplica deci numai circuitelor liniare, unde este valabil principiul suprapunerii efectelor. Cele trei sisteme simetrice în care se descompune sistemul nesimetric se numesc: sistem direct (de succesiune directă), sistem invers (de succesiune inversă) şi sistem homopolar (trei mărimi sinusoidale de amplitudini egale şi în fază).

23.1. TEOREMA COMPONENTELOR SIMETRICE

Un sistem ordonat nesimetric de trei mărimi ($\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$) se poate descompune întotdeauna în trei sisteme simetrice sub forma:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{V}_h + \underline{V}_d + \underline{V}_i \\ \underline{V}_2 &= \underline{V}_h + a^2\underline{V}_d + a\underline{V}_i \\ \underline{V}_3 &= \underline{V}_h + a\underline{V}_d + a^2\underline{V}_i. \end{aligned} \tag{23.1}$$

Această descompunere este unică şi totdeauna posibilă, deoarece determinantul sistemului (23.1) este diferit de zero:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = 3\sqrt{3}\,\mathrm{j} \neq 0.$$

Mărimile fundamentale $\underline{V}_h$, $\underline{V}_d$ şi $\underline{V}_i$ se numesc respectiv componenta homopolară, componenta directă şi componenta inversă. Sistemele simetrice homopolar, direct şi invers sînt:

$\underline{V}_h$, $\underline{V}_h$, $\underline{V}_h$	— sistemul homopolar
$\underline{V}_d$, $a^2\underline{V}_d$, $a\underline{V}_d$	— sistemul direct
$\underline{V}_i$, $a\underline{V}_i$, $a^2\underline{V}_i$	— sistemul invers.

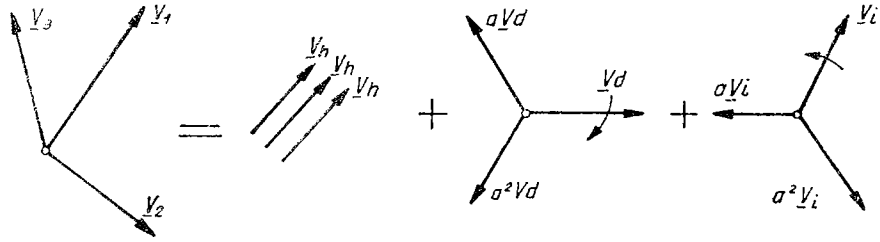


Fig. 23.1

Descompunerea sistemului trifazat nesimetric în trei sisteme trifazate simetrice este reprezentată simbolic în figura 23.1.

Rezolvînd (23.1) invers, se obţine:

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3)$$

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3) \qquad (23.2)$$

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3).$$

Pe baza relaţiilor (23.2) componentele simetrice se pot determina prin construcţie grafică, aşa cum se arată în figura 23.2 (este reprezentată numai pentru componenta homopolară şi pentru cea directă, pentru a nu complica desenul).

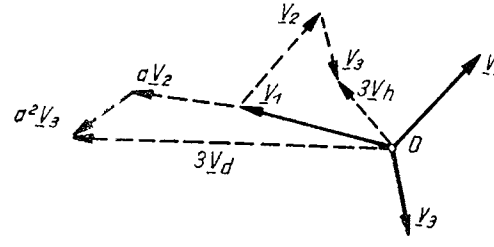


Fig. 23.2

Realitatea fizică a componentelor simetrice constă în faptul că ele se pot măsura. Dispozitivele care reuşesc să separe componentele simetrice, pentru a putea fi apoi măsurate se numesc *filtre pentru componente simetrice.*

23.2. FILTRE PENTRU COMPONENTE SIMETRICE

Există mai multe tipuri de filtre care separă componentele simetrice ale unui sistem trifazat de tensiuni sau curenţi. Se vor prezenta cîteva din ele.

23.2.1. Filtre pentru componente homopolare

Cel mai simplu filtru pentru componenta homopolară a unui sistem de curenți este format din trei transformatoare de curent, cu înfășurările secundare legate în paralel (fig. 23.3). Dacă raportul de transformare al acestor transformatoare este egal cu unitatea, curentul care trece prin ampermetrul A este:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3\underline{I}_h. \tag{23.3}$$

Pentru măsurarea componentei homopolare de tensiune se utilizează un filtru compus din trei transformatoare monofazate, ale căror primare

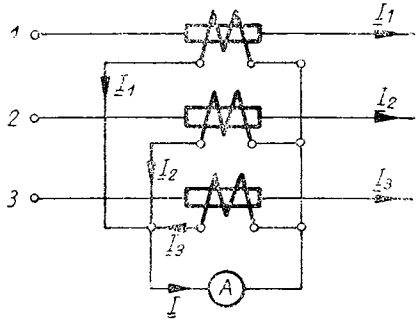


Fig. 23.3

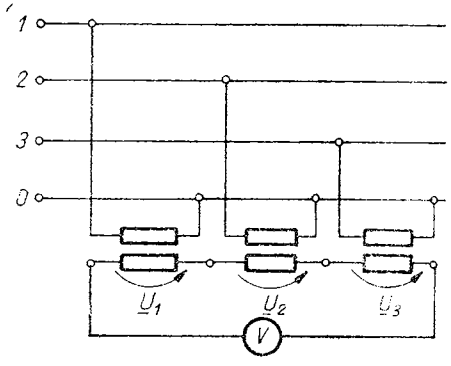


Fig. 23.4

sînt legate între faze și nul, iar secundarele sînt legate în serie (fig. 23.4). Considerînd raportul de transformare egal cu unitatea, voltmetrul V va indica tensiunea:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 3\underline{U}_h. \tag{23.4}$$

23.2.2. Filtru pentru componenta directă și inversă a tensiunilor de linie (fig. 23.5)

Elementele componente ale filtrului satisfac relația:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = a^2\underline{Y}_2, \tag{23.5}$$

avînd suma:

$$\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = (1 + 2a^2)\underline{Y}_2 = (a^2 - a)\underline{Y}_2. \tag{23.6}$$

Componentele directă și inversă ale tensiunilor de linie (relația 23.2) sînt:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1d} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{12} + a\underline{U}_{23} + a^2\underline{U}_{31}) \\ \underline{U}_{1i} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{12} + a^2\underline{U}_{23} + a\underline{U}_{31}). \end{aligned} \tag{23.7}$$

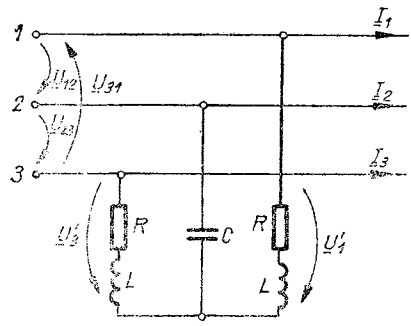


Fig. 23.5

Ținînd cont de relația, $\underline{U}_{12}+\underline{U}_{23}+\underline{U}_{31}=0$, (23.7) se poate scrie:

$$\underline{U}_{id}=\frac{1}{3}[(-\underline{U}_{23}-\underline{U}_{31})+a\underline{U}_{23}+a^2\underline{U}_{31}]=\frac{1-a}{3}(a^2\underline{U}_{31}-\underline{U}_{23}) \quad (23.8)$$

$$\underline{U}_{ii}=\frac{1}{3}[\underline{U}_{12}+(-\underline{U}_{12}-\underline{U}_{31})a^2+a\underline{U}_{31}]=\frac{1-a}{3}(\underline{U}_{12}-a^2\underline{U}_{31}). \quad (23.9)$$

Utilizînd relațiile (22.34) și (22.36) și ținînd cont de (23.5) și (23.6), tensiunile $\underline{U}_1'$ și $\underline{U}_3'$ sînt:

$$\underline{U}_1'=\frac{\underline{U}_{12}\cdot\underline{Y}_2-\underline{U}_{31}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}=\frac{\underline{Y}_2(\underline{U}_{12}-a^2\underline{U}_{31})}{(a^2-a)\underline{Y}_2}a(1-a)(\underline{U}_{12}-a^2\underline{U}_{31}) \quad (23.10)$$

$$\underline{U}_3'=\frac{\underline{U}_{31}\cdot a^2\underline{Y}_2-\underline{U}_{23}\cdot\underline{Y}_2}{(a^2-a)\underline{Y}_2}=\frac{a^2\underline{U}_{31}-\underline{U}_{23}}{a^2-a}=a(1-a)(a^2\underline{U}_{31}-\underline{U}_{23}) \quad (23.11)$$

Comparînd relațiile (23.9) cu (23.10) și (23.8) cu (23.11), rezultă că tensiunile $\underline{U}_3'$ și $\underline{U}_1'$ sînt proporționale respectiv cu componenta directă și cea inversă a sistemului tensiunilor de linie.

23.3. CÎTEVA PROPRIETĂȚI ALE COMPONENTELOR SIMETRICE

a) Prima ecuație din (23.2) arată că un sistem a cărui sumă este zero nu are componentă homopolară. Aceasta conduce la următoarele:

— sistemul trifazat cu neutrul izolat are componenta homopolară a curentului nulă;

— sistemul tensiunilor de linie la orice tip de receptor nu are componentă homopolară.

b) Se poate stabili o relație între componentele simetrice ale tensiunilor de linie și ale tensiunilor de fază.

Componentele simetrice ale tensiunilor de fază se pot scrie:

$$\underline{U}_{fd}=\frac{1}{3}(\underline{U}_1+a\underline{U}_2+a^2\underline{U}_3)=\frac{1}{3}[(\underline{U}_3-\underline{U}_{31})+a(\underline{U}_3+\underline{U}_{23})+a^2\underline{U}_3]=$$

$$\frac{1}{3}[(1+a+a^2)\,\underline{U}_3+a\underline{U}_{23}-\underline{U}_{31}]=\frac{a}{3}(\underline{U}_{23}-a^2\underline{U}_{31}) \quad (23.12)$$

$$\underline{U}_{fi}=\frac{1}{3}(\underline{U}_1+a^2\underline{U}_2+a\underline{U}_3)=\frac{1}{3}[\underline{U}_1+a^2(\underline{U}_1-\underline{U}_{12})+a(\underline{U}_1+\underline{U}_{31})]=$$

$$=\frac{1}{3}[(1+a^2+a)\,\underline{U}_1+a\underline{U}_{31}-a^2\underline{U}_{12}]=\frac{a^2}{3}(a^2\underline{U}_{31}-\underline{U}_{12}). \quad (23.13)$$

Din relațiile (23.8) și (23.12) rezultă egalitatea:

$$\underline{U}_{ld} = (1 - a^2)\,\underline{U}_{fd} = \sqrt{3}\,e^{j\frac{\pi}{6}}\underline{U}_{fd}, \tag{23.14}$$

apoi din (23.9) și (23.13) rezultă:

$$\underline{U}_{li} = (1 - a)\,\underline{U}_{fi} = \sqrt{3}\,e^{-j\frac{\pi}{6}}\underline{U}_{fi}. \tag{23.15}$$

Pentru valori efective se poate scrie:

$$U_{ld} = \sqrt{3}\,U_{fd};\ U_{li} = \sqrt{3}\,U_{fi}. \tag{23.16}$$

Aceleași relații există și între componentele simetrice ale curenților de linie și de fază la un receptor în triunghi:

$$I_{ld} = \sqrt{3}\,I_{fd};\ I_{li} = \sqrt{3}\,I_{fi}. \tag{23.17}$$

c) Nesimetria unui sistem se apreciază prin:

— gradul de disimetrie definit ca raportul valorilor efective ale componentei inverse și ale celei directe:

$$\varepsilon_i = \frac{V_i}{V_d}; \tag{23.18}$$

— gradul de asimetrie definit ca raportul valorilor efective ale componentei homopolare și ale celei directe:

$$\varepsilon_h = \frac{V_h}{V_d}. \tag{23.19}$$

În practică, un sistem se consideră simetric dacă valorile (23.18) și (23.19) sînt sub 5%.

23.4. CIRCUITE TRIFAZATE ECHILIBRATE, ALIMENTATE CU TENSIUNI NESIMETRICE

Se consideră în figura 23.6, *a* un circuit trifazat echilibrat, format din trei impedanțe $\underline{Z}$ egale, conectate în stea. Impedanța nulului este $\underline{Z}_0$. Sistemul de tensiuni este nesimetric și se poate descompune sub forma (23.1). Se efectuează calculul prin suprapunerea efectelor, descompunînd sistemul tensiunilor de alimentare în componentele sale simetrice (relațiile 23.1).

Regimul de funcționare care se stabilește în schema din figura 23.6, *a* poate fi obținut ca suma celor trei regimuri de funcționare (fig. 23.6 *b*, *c* și *d*), care se obțin alimentînd pe rînd receptorul cu cele trei sisteme simetrice: sistemul direct, invers și homopolar.

Aplicînd teorema a doua a lui Kirchhoff, componentele fundamentale ale sistemelor simetrice de curenți se vor calcula cu relațiile:

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}};\ \underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}};\ \underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z} + 3\underline{Z}_0}. \tag{23.20}$$

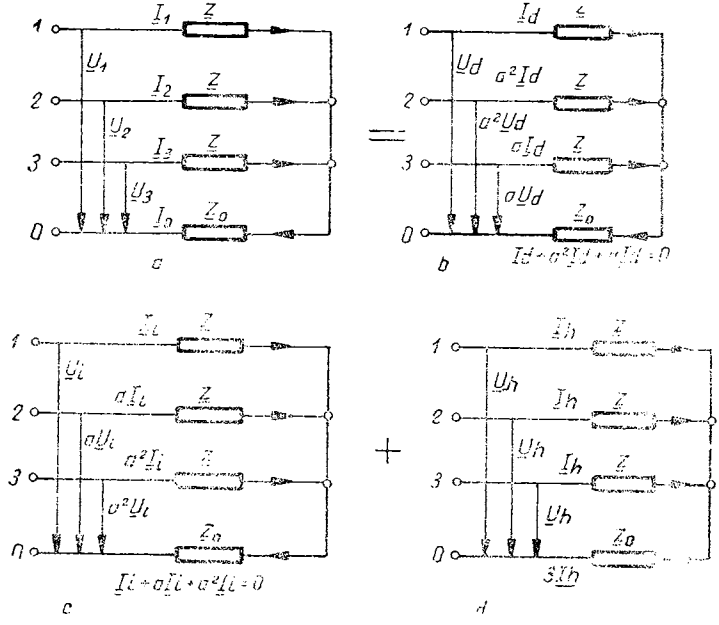


Fig. 23.6

Schemelor trifazate simetrice de succesiune directă inversă şi homopolară le corespund schemele echivalente monofilare din figura 25.7, care satisfac relaţiile (23.20). Impedanţele corespunzătoare celor trei sisteme simetrice se numesc respectiv impedanţă directă $\underline{Z}_d$, impedanţă inversă $\underline{Z}_i$ şi impedanţă homopolară $\underline{Z}_h$, care au valorile:

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}; \quad \underline{Z}_i = \underline{Z}; \quad \underline{Z}_h = \underline{Z} + 3\underline{Z}_0. \tag{23.21}$$

Se remarcă faptul că impedanţa firului neutru nu intervine decît în ultima relaţie din (23.21).

Practic, rezolvarea unui circuit echilibrat, alimentat cu un sistem nesimetric de tensiuni, se face cum s-a arătat mai sus în următoarele etape:

a) Se determină componentele simetrice ale tensiunilor de fază aplicate receptorului (relaţiile 23.2);

b) Se formează schemele de succesiune directă, inversă şi homopolară (fig. 23.7);

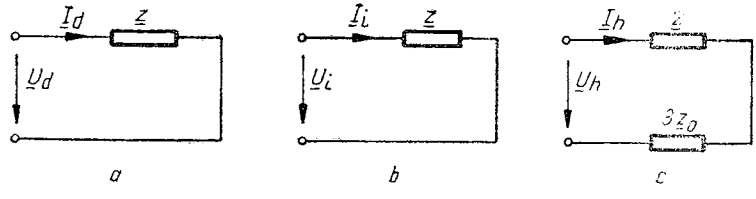


Fig. 23.7

c) Se determină componentele simetrice ale sistemului de curenți (relațiile 23.20);

d) Se calculează curenții nesimetrici ai celor trei faze cu relații de forma (23.1).

23.5. CIRCUITE TRIFAZATE DEZECHILIBRATE, ALIMENTATE CU TENSIUNI NESIMETRICE

Se consideră circuitul dezechilibrat din figura 23.8, avînd impedanțele fazelor $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ neegale, iar impedanța nulului $\underline{Z}_0$. Sistemul tensiunilor de alimentare este nesimetric. Sistemul nesimetric al tensiunilor de alimentare se poate descompune în componente simetrice, ale căror valori sînt:

$$\underline{U}_h = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3)$$

$$\underline{U}_d = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3) \qquad (23.22)$$

$$\underline{U}_i = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3).$$

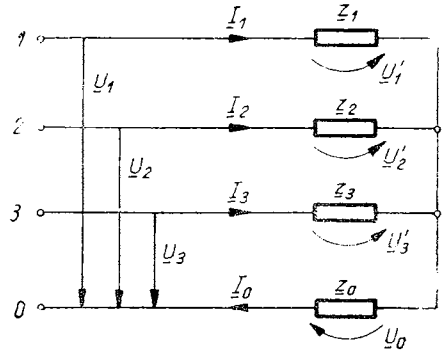


Fig. 23.8

Se determină curenții celor trei faze sub forma componentelor simetrice, acestea din urmă fiind necunoscute auxiliare:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i\\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i\\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_h + a\underline{I}_d + a^3\underline{I}_i\end{aligned} \qquad (23.23)$$

Problema constă în a găsi expresia componentelor simetrice ale curenților ($\underline{I}_h$, $\underline{I}_d$ și $\underline{I}_i$) în funcție de componentele simetrice ale tensiunilor de alimentare ($\underline{U}_h$, $\underline{U}_d$, $\underline{U}_i$) și de impedanțele din schemă ($\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$, $\underline{Z}_0$).

Teorema întîi a lui Kirchhoff aplicată în nodul O conduce la:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3\underline{I}_h. \qquad (23.24)$$

Aplicînd teorema a doua a lui Kirchhoff, se stabilesc relațiile:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_0\underline{I}_0 = \underline{Z}_1(\underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i) + 3\underline{Z}_0\underline{I}_h\\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{Z}_0\underline{I}_0 = \underline{Z}_2(\underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i) + 3\underline{Z}_0\underline{I}_h\\ \underline{U}_3 &= \underline{Z}_3\underline{I}_3 + \underline{Z}_0\underline{I}_0 = \underline{Z}_3(\underline{I}_h + a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i) + 3\underline{Z}_0\underline{I}_h\end{aligned} \qquad (23.25)$$

Înlocuind relațiile (23.25) în (23.22), se obține:

$$\underline{U}_h = \frac{1}{3}(9\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}_h + (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\underline{I}$$

$$\underline{U}_d = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\,\underline{I}_h + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\,\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\,\underline{I}_i$$

$$\underline{U}_i = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\,\underline{I}_h + (\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\,\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\,\underline{I}_i \qquad (23.26)$$

Se notează prin analogie cu relaţiile (23.22):

$$\underline{Z}_h = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \text{ (impedanţa homopolară)}$$

$$\underline{Z}_d = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3) \text{ (impedanţa directă)} \qquad (23.27)$$

$$\underline{Z}_i = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3) \text{ (impedanţa inversă)}$$

şi relaţiile (23.26) capătă forma:

$$\underline{U}_h = (3\underline{Z}_0 + \underline{Z}_h)\,\underline{I}_h + \underline{Z}_i \cdot \underline{I}_d + \underline{Z}_d \cdot \underline{I}_i$$

$$\underline{U}_d = \underline{Z}_d \cdot \underline{I}_h + \underline{Z}_h \cdot \underline{I}_d + \underline{Z}_i \cdot \underline{I}_i \qquad (23.28)$$

$$\underline{U}_i = \underline{Z}_i \cdot \underline{I}_h + \underline{Z}_d \cdot \underline{I}_d + \underline{Z}_h \cdot \underline{I}_i.$$

Dacă se rezolvă sistemul (23.28) se obţin valorile $\underline{I}_h$, $\underline{I}_d$ şi $\underline{I}_i$, care introduse apoi în (23.23) dau curenţii din fazele receptorului.

Practic, rezolvarea reţelelor dezechilibrate alimentate cu tensiuni nesimetrice, prin metoda componentelor simetrice se face în următoarele etape:

a) Se găsesc componentele simetrice ale sistemului trifazat de tensiuni de alimentare (relaţia 23.22);

b) Se găsesc „componentele simetrice" ale impendaţelor (relaţiile 23.27);

c) Se rezolvă sistemul de ecuaţii (23.28) din care se deduc valorile $\underline{I}_h$, $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$;

d) Se calculează curenţii în cele trei faze cu relaţiile (23.23).

Caz particular

Dacă receptorul este echilibrat ($\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$), relaţiile (23.27) devin:

$$\underline{Z}_h = \underline{Z};\ \underline{Z}_d = 0;\ \underline{Z}_i = 0 \qquad (23.29)$$

iar sistemul (23.28):

$$\underline{U}_h = (\underline{Z} + 3\underline{Z}_0)\,\underline{I}_h;\ \underline{U}_d = \underline{Z} \cdot \underline{I}_d;\ \underline{U}_i = \underline{Z} \cdot \underline{I}_i, \qquad (23.30)$$

conduce la schemele echivalente din figura 23.7.

23.6. APLICAREA METODEI COMPONENTELOR SIMETRICE LA CALCULUL CURENȚILOR DE SCURTCIRCUIT

Se consideră un generator trifazat simetric avînd impedanța homopolară $\underline{Z}_h$, cea directă $\underline{Z}_d$ și cea inversă $\underline{Z}_i$. Nulul generatorului este legat la pămînt prin impedanța $\underline{Z}_0$ (fig. 23.9). Aplicînd legea lui Ohm pentru componentele simetrice, cu convenția de la generatoare, rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{E}_h &= \underline{U}_h + \underline{Z}_h \cdot \underline{I}_h \\ \underline{E}_d &= \underline{U}_d + \underline{Z}_d \cdot \underline{I}_d \\ \underline{E}_i &= \underline{U}_i + \underline{Z}_i \cdot \underline{I}_i. \end{aligned} \qquad (23.31)$$

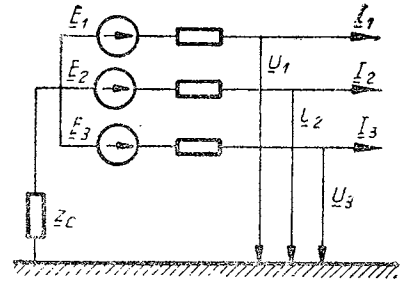


Fig. 23.9

Deoarece presupunem că generatorul produce (indiferent de situație) un sistem de tensiuni electromotoare simetric ($\underline{E}_h = 0$; $\underline{E}_d = \underline{E}_1$; $\underline{E}_i = 0$), rezultă valabilitatea sistemului:

$$\begin{aligned} \underline{U}_h + \underline{Z}_h \cdot \underline{I}_h &= 0 \\ \underline{U}_d + \underline{Z}_d \cdot \underline{I}_d &= \underline{E}_1 \\ \underline{U}_i + \underline{Z}_i \cdot \underline{I}_i &= 0 \end{aligned} \qquad (23.32)$$

(indiferent de situație). Sistemul celor trei tensiuni de fază cît și al celor trei curenți se descompune în componentele simetrice:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}_h + a^2\underline{U}_d + a\underline{U}_i \\ \underline{U}_3 &= \underline{U}_h + a\underline{U}_d + a^2\underline{U}_i \end{aligned}\right\} \qquad (23.33)$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_h + a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i \end{aligned}\right\} \qquad (23.34)$$

Pentru calculul curenților de scurtcircuit se utilizează relațiile (23.32), (23.33) și (23.34).

a) Scurtcircuit monofazat. Se presupune că faza 1 este pusă la pămînt. Curentul în această fază ($\underline{I}_1 = \underline{I}_{sc1}$) crește foarte mult și se pot considera neglijabili curenți în fazele 2 și 3, deci:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{sc1}; \quad \underline{I}_2 = 0; \quad \underline{I}_3 = 0. \qquad (23.35)$$

În același timp, faza 1 pusă la pămînt conduce la:

$$\underline{U}_1 = 0. \qquad (23.36)$$

Introducînd (23.35) în (23.34) se găseşte:

$$\underline{I}_h = \underline{I}_d = \underline{I}_i; \quad \underline{I}_{sc1} = 3\underline{I}_h, \tag{23.37}$$

Adunînd relaţiile (23.32): $(\underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i) + \underline{I}_h(\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i) = \underline{E}_1$ şi ţinînd cont de (23.36) şi de prima relaţie din (23.33), rezultă în final:

$$\underline{I}_h = \frac{E_1}{\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i}, \text{ sau } \underline{I}_{sc1} = \frac{3E_1}{\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i}. \tag{23.39}$$

b) Scurtcircuit bifazat. Scurtcircuitul bifazat (între fazele 2 şi 3) conduce la relaţiile:

$$\underline{I}_1 = 0; \; \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0; \; \underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 = 0. \tag{23.39}$$

Înlocuind (23.39) în (23.33) şi (23.34), rezultă:

$$\underline{U}_d = \underline{U}_i; \quad \underline{U}_h = 0 \tag{23.40}$$

$$\underline{I}_d = -\underline{I}_i; \quad \underline{I}_h = 0. \tag{23.41}$$

Scăzînd ultimele două relaţii din (23.32), se obţine:

$$\underline{I}_d = -\underline{I}_i = \frac{E_1}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i}, \tag{23.42}$$

apoi din (23.34) se găseşte curentul pe faza a doua (curentul de scurtcircuit bifazat):

$$\underline{I}_{sc2} = \underline{I}_2 = \underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i = (a^2 - a)\frac{E_1}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i} = -\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}E_1}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i}. \tag{23.43}$$

c) Scurtcircuit trifazat. Toate cele trei faze ale generatorului sînt legate în scurtcircuit. Avem în acest caz un receptor simetric alimentat cu tensiuni simetrice. Curenţii în cele trei faze sînt egali cu curentul de scurtcircuit trifazat:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{sc3} = \frac{E_1}{\underline{Z}_d}. \tag{23.44}$$

Observaţii

a) Impedanţa Z_0 intervine numai în cazul scurtcircuitului monofazat, în care caz, considerînd fazele generatorului ca avînd impedanţe identice pentru componentele simetrice, cu (23.21) rezultă:

$$\underline{I}_{sc1} = \frac{3E_1}{3\underline{Z}_0 + \underline{Z} + \underline{Z} + \underline{Z}} = \frac{E_1}{\underline{Z} + \underline{Z}_0}. \tag{23.49}$$

Această relaţie arată că impedanţa conectată între nulul generatorului şi pămînt protejează generatorul împotriva scurtcircuitelor monofazate. În practică, impedanţa $\underline{Z}_0$ este o bobină, numită *bobină de stingere.*

b) Cu relaţiile (23.38), (23.43) şi (23.44) se determină în practică impedanţele homopolară, directă şi inversă la maşinile electrice. Se efectuează trei încercări de scurtcircuit (bineînţeles avînd grijă ca tensiunile electromotoare ale generatorului să fie suficient de mici pentru a nu crea curenţi de scurtcircuit care să distrugă generatorul), măsurîndu-se de fiecare dată valorile $\underline{E}_1$, $\underline{I}_{sc1}$, $\underline{I}_{sc2}$ şi respectiv $\underline{I}_{sc3}$, apoi se rezolvă sistemul celor 3 ecuaţii cu necunoscutele $\underline{Z}_h$, $\underline{Z}_d$, $\underline{Z}_i$.

23.7. CALCULUL PUTERILOR ÎN CIRCUITE TRIFAZATE CU AJUTORUL COMPONENTELOR SIMETRICE

Puterea aparentă complexă într-un sistem trifazat nesimetric este dată de relaţia:

$$\underline{S} = \underline{U}_1\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^*. \tag{23.46}$$

Introducînd componentele simetrice ale tensiunilor de fază:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}_h + a^2\underline{U}_d + a\underline{U}_i \\ \underline{U}_3 &= \underline{U}_h + a\,\underline{U}_d + a^2\underline{U}_i \end{aligned} \tag{23.47}$$

şi componentele simetrice ale curenţilor conjugaţi $[(a^2)^* = a;\ a^* = a^2]$:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1^* &= \underline{I}_h^* + \underline{I}_d^* + \underline{I}_i^* \\ \underline{I}_2^* &= \underline{I}_h^* + a\underline{I}_d^* + a^2\underline{I}_i^* \\ \underline{I}_3^* &= \underline{I}_h^* + a^2\underline{I}_d^* + a\underline{I}_i^* \end{aligned} \tag{23.48}$$

şi ţinînd cont de relaţiile:

$$a^3 = 1;\ a^4 = a;\quad 1 + a + a^2 = 0\ , \tag{23.49}$$

relaţia (23.46) devine:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_h\underline{I}_h^* + 3\underline{U}_d\underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i\underline{I}_i^*. \tag{23.50}$$

Puterile active şi reactive vor fi deci:

$$\begin{aligned} P = P_h + P_d + P_i = 3U_hI_h\cos\varphi_h + 3U_dI_d\cos\varphi_d + \\ + 3U_iI_i\cos\varphi_i \end{aligned} \tag{23.51}$$

$$\begin{aligned} Q = Q_h + Q_d + Q_i = 3U_hI_h\sin\varphi_h + 3U_dI_d\sin\varphi_d + \\ + 3U_iI_i\sin\varphi_i. \end{aligned} \tag{23.52}$$

Relaţiile (23.51) şi (23.52) arată că puterea activă, respectiv reactivă, a unui circuit trifazat este egală cu suma puterilor corespunzătoare sistemelor simetrice de aceleaşi nume ale curenţilor şi tensiunilor.

CAPITOLUL 24

REGIMUL TRANZITORIU AL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE

24.1. GENERALITĂȚI. TEOREMELE COMUTAȚIEI

În studiul circuitelor electrice s-a considerat pînă în prezent numai cazul regimurilor permanente, adică cazul în care curenții și tensiunile electromotoare erau constante (curent continuu) sau erau funcții periodice de timp cu amplitudini constante (curent alternativ). Obținerea unui anumit regim permanent într-un circuit electric nu se poate face instantaneu deoarece acumularea energiei magnetice sau electrice de către diversele elemente ale circuitului se produce într-un timp oarecare.

Regimul electrocinetic nestaționar corespunzător trecerii unui circuit electric de la un regim permanent la un alt regim permanent se numește regim *tranzitoriu*.

Teoretic regimul tranzitoriu durează un timp infinit lung însă, practic el poate fi considerat că durează o perioadă de timp egală ca ordin de mărime cu constanta de timp a circuitului, adică de ordinul sutimilor sau zecimilor de secundă, iar în cazuri cu totul speciale de ordinul secundelor sau minutelor.

Regimurile tranzitorii pot fi întîlnite la închiderea sau deschiderea unor întreruptoare care alimentează circuitul considerat, sau în cazul în care parametrii circuitului variază brusc, datorită unor condiții speciale de lucru. După modul în care se stabilește regimul permanent al unui circuit, regimul tranzitoriu poate fi aperiodic sau oscilant. Regimul se numește *aperiodic* dacă mărimea respectivă (curentul sau tensiunea) variază unidirecțional spre regimul permanent către care tinde (fig. 24.1) și se numește *oscilant* dacă mărimea oscilează în jurul valorii de regim permanent către care tinde (fig. 24.2). Indiferent dacă regimul tranzitoriu este aperiodic sau oscilant, el se amortizează în timp datorită pierderilor de energie prin efect Joule ce se produc în rezistențele circuitului.

Metoda generală de studiu a regimurilor tranzitorii constă în scrierea ecuațiilor integro-diferențiale ale circuitului și rezolvarea lor.

Fie ecuația unui circuit R, L, C serie, scrisă sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + R \cdot i + \frac{1}{C}\int i \cdot \mathrm{d}t = u(t). \tag{24.1}$$

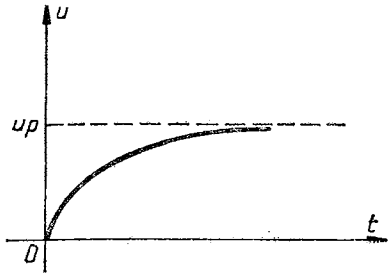


Fig. 24.1

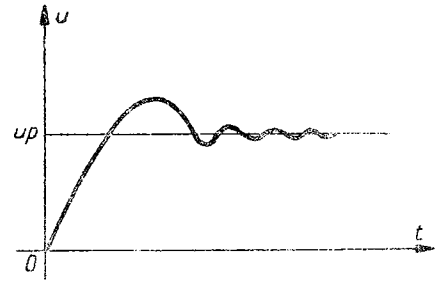


Fig. 24.2

Dacă elementele circuitului sînt liniare, prin derivare se obţine:

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = u'(t). \tag{24.2}$$

Soluţia ecuaţiei (24.2) se obţine ca o sumă dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene (fără membru drept) şi o soluţie particulară a ecuaţiei, de aceeaşi formă cu membrul drept. Deci:

$$i = i' + i''. \tag{24.3}$$

În relaţia (24.3), i' reprezintă *componenta liberă*, care nu depinde de forma tensiunii aplicate ($i' = i_l$), iar i'' reprezintă *componenta de regim permanent* ($i'' = i_p$). Componenta liberă se datoreşte fizic rezervei de energie acumulate în cîmpul electromagnetic al elementelor de circuit şi ea dispare cu timpul datorită pierderilor de energie pe rezistenţele din circuit.

Rezolvarea problemelor de regim tranzitoriu este relativ simpă în cazul circuitelor liniare în care intervin ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi. Ea este însă extrem de complicată în cazul circuitelor neliniare sau parametrice în care trebuiesc rezolvate ecuaţii diferenţiale neliniare sau cu coeficienţi variabili.

O problemă importantă în studiul regimurilor tranzitorii este determinarea constantelor de integrare ale soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale care determină regimul tranzitoriu. Numărul de constante este egal cu ordinul ecuaţiei diferenţiale, care la rîndul său este egal cu numărul de bobine şi condensatoare existente în circuit (dacă se grupează toate bobinele serie în una singură şi toate condensatoarele în paralel în unul singur). Constantele de integrare se determină din condiţiile iniţiale ale circuitului, adică cunoscînd valoarea curentului iniţial care circulă prin bobine şi valoarea tensiunii iniţiale la bornele condensatoarelor. Acestea determină valorile energiilor magnetice $\left(\frac{1}{2}Li_0^2\right)$ şi electrice $\left(\frac{1}{2}CU_{c_0}^2\right)$ acumulate de elementele reactive ale circuitului. Aceste energii acumulate în bobine şi condensatoare nu pot varia prin salt, ci variaţia lor este determinată de teoremele comutaţiei.

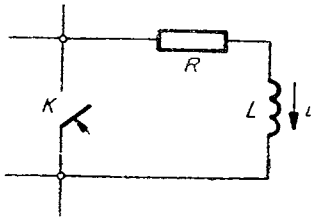


Fig. 24.3

Prima teoremă a comutației determină modul de variație a curentului prin bobine în momentul comutației (fig. 24.3). Tensiunea la bornele bobinei este:

$$u_L = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{24.4}$$

Dacă curentul i ar varia prin salt, atunci $u_L \to \infty$, ceea ce nu este posibil, deci prima teoremă a comutației spune că *în momentul comutației curentul prin bobine nu poate varia prin salt.* Dacă comutarea se face la momentul $t = 0$ se poate scrie:

$$i_{L(-0)} = i_{L(+0)} = i_{L(0)} \tag{24.5}$$

Tensiunea la bornele bobinei poate varia însă prin salt.

Grafic variația curentului și a tensiunii la bornele unei bobine în regim tranzitoriu poate fi, de exemplu, ca în figura 24.4, *a* și 24.4, *b*. Curentul prin bobină este deci o funcție continuă.

A doua teoremă a comutației determină modul de variație a tensiunii la bornele condensatoarelor în momentul comutației. Curentul care circulă prin condensator (fig. 24.5) este:

$$i_c = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}. \tag{24.6}$$

Dacă tensiunea ar varia prin salt, atunci $i_c \to \infty$, ceea ce nu este posibil; deci a doua teoremă a comutației spune că *tensiunea la bornele*

Fig. 24.4

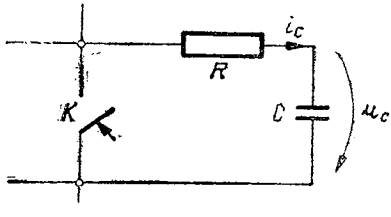


Fig. 24.5

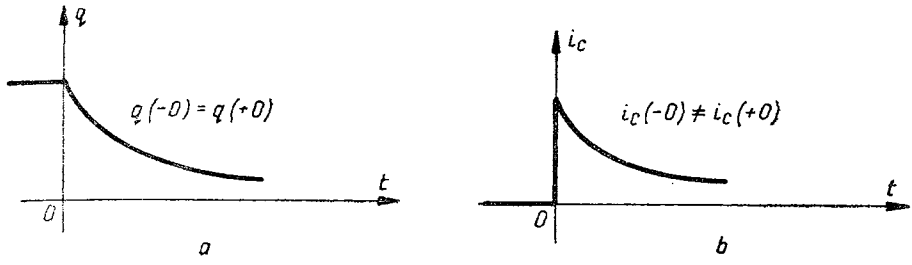


Fig. 24.6

condensatoarelor (deci și sarcina q) nu poate varia prin salt în momentul comutației, însă curentul poate varia prin salt:

$$q(-0) = q(+0) = q(0). \tag{24.7}$$

Graficul variației tensiunii la bornele condensatorului și a curentului prin condensator poate fi de exemplu cel din figura 24.6, *a* și *b*.

24.2. REGIMUL TRANZITORIU AL CIRCUITELOR R, L ȘI R, C

24.2.1. Circuitul serie R, L

Ecuația circuitului serie R, L căruia i se aplică o tensiune oarecare $u(t)$ este:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = u(t). \tag{24.8}$$

Regimul tranzitoriu se găsește deci ca suprapunerea regimului liber peste regimul permanent (vezi relația 24.3:)

$$i = i_p + i_l. \tag{24.9}$$

Regimul liber este soluția generală a ecuației diferențiale (24.8), fără membrul drept, iar regimul permanent este o soluție particulară a ecuației (24.8), cu membrul drept, care se știe calcula. Regimul liber va fi deci soluția ecuației:

$$L\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{d}t} + Ri_l = 0 \tag{24.10}$$

Ecuația caracteristică este:

$$Lp + R = 0, \text{ deci } p = -\frac{R}{L}. \tag{24.11}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (24.10) va fi:

$$i_l = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \tag{24.12}$$

cu care soluţia ecuaţiei (24.8) se poate scrie:

$$i = i_p + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \tag{24.13}$$

Punînd condiţia iniţială: $t = 0$; $i = i_0$, (24.13) devine:

$$i_0 = i_{p0} + A, \tag{24.14}$$

de unde:

$$A = i_0 - i_{p0} \tag{24.15}$$

Înlocuind valoarea constantei în (24.13), se obţine:

$$i = i_p + (i_0 - i_{p0})e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{24.16}$$

Mărimea:

$$\frac{L}{R} = \tau \tag{24.17}$$

are dimensiunea unui timp şi se numeşte *constanta de timp* a circuitului. Relaţia dimensională este:

$$\left[\frac{L}{R}\right] = \frac{1\,\text{H}}{1\,\Omega} = \frac{1 \cdot \text{V} \cdot 1\,\text{s}}{1\,\Omega \cdot 1\,\text{A}} = 1\ \text{s}. \tag{24.18}$$

Cu (24.17) şi (24.16), soluţia de regim tranzitoriu a ecuaţiei (24.8) este:

$$i = i_p + (i_0 - {}_{p0})e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{24.19}$$

În această relaţie:

i_p este curentul de regim permanent, care are aceeaşi formă cu tensiunea aplicată şi poate fi determinat cu metodele expuse în capitolele 7 şi 20;

i_{p0} — valoarea lui i_p pentru $t = 0$;

i_0 — valoarea curentului din bobină, înainte de comutaţie.

Exemple

1. Conectarea circuitului R, L la o sursă de tensiune continuă E (fig. 24.7). Înainte de comutaţie, curentul prin bobină era zero, deci:

$$i_0 = 0. \tag{24.20}$$

Valoarea curentului de regim permanent (curentul din circuit după un timp foarte lung de la închiderea comutatorului k) este:

$$i_p = \frac{E}{R}, \tag{24.21}$$

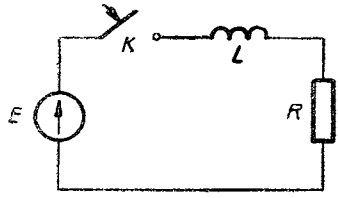


Fig. 24.7

apoi:

$$i_{p_0} = \frac{E}{R}. \tag{24.22}$$

Înlocuind valorile (24.20), (24.21) și (24.22) în (24.19), rezultă curentul de regim tranzitoriu al circuitului din figura 24.7:

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{24.23}$$

Tensiunea la bornele bobinei este:

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L \cdot \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{24.24}$$

sau, utilizînd (24.17):

$$u_L = E e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{24.25}$$

Variația în timp a lui i și u_L, după (24.23) și (24.25), este dată în figura 24.8, *a* și *b*.

2. Scurtcircuitarea sursei care alimentează un circuit serie R, L (fig. 24.9).

Pentru acest caz, constantele din (24.19) sînt:

$$i_0 = \frac{E}{R} \tag{24.26}$$

$$i_p = 0 \tag{24.27}$$

$$i_{p_0} = 0 \tag{24.28}$$

Curentul de regim tranzitoriu va fi deci:

$$i = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{24.29}$$

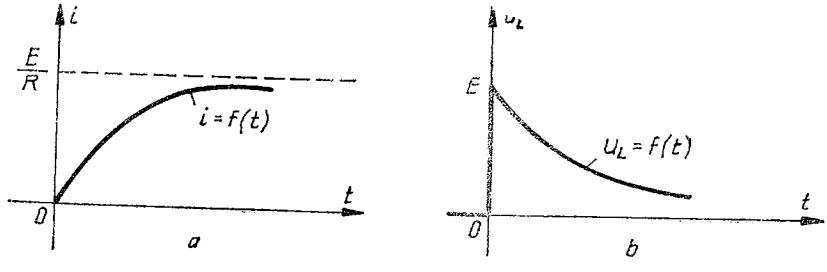


Fig. 24.8

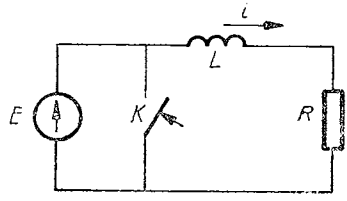


Fig. 24.9

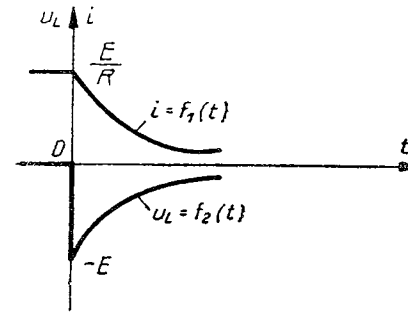


Fig. 24.10

Tensiunea la bornele bobinei, în regim tranzitoriu este:

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -E \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{24.30}$$

Reprezentarea grafică a funcțiilor (24.29) și (24.30) este dată în figura 24.10.

24.2.2. Circuitul serie R, C

Ecuația circuitului serie R, C căruia i se aplică o tensiune oarecare $u(t)$ se scrie:

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t = u(t). \tag{24.31}$$

Dacă se înlocuiește:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \text{ și } q = \int i\,\mathrm{d}t, \tag{24.32}$$

ecuația (24.31) devine:

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = u(t). \tag{24.33}$$

Regimul tranzitoriu se caută ca o suprapunere a regimului liber peste regimul permanent:

$$q = q_p + q_l. \tag{24.34}$$

Regimul permanent se știe calcula, iar regimul liber este soluția generală a ecuației diferențiale (24.33) fără membrul drept:

$$R\frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q_l = 0. \tag{24.35}$$

Rezolvarea ecuației (24.35) conduce la soluția:

$$q_l = A \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}. \tag{24.36}$$

Soluția generală a ecuației (24.33) este deci:

$$q = q_p + A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{24.37}$$

Punînd condiția inițială: $t = 0$; $q = q_0$, rezultă:

$$A = q_0 - q_{p0}, \tag{24.38}$$

care înlocuită în (24.37) dă expresia sarcinii q de pe armătura condensatorului în regim tranzitoriu:

$$q = q_p + (q_0 - q_{p0}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{24.39}$$

în care s-a notat constanta de timp a circuitului R, C:

$$\tau = R \cdot C. \tag{24.40}$$

În expresia sarcinii de regim tranzitoriu:

q_0 este sarcina de pe armătura condensatorului imediat înainte de a se produce comutația;

q_p — sarcina de regim permanent, care se poate calcula cu metode cunoscute, fiind o soluție particulară a ecuației (24.33) de aceeași formă cu membrul drept al ecuației și reprezintă sarcina de pe armătura condensatorului la un timp foarte lung după comutație;

q_{p0} — valoarea lui q_p la momentul $t = 0$.

Exemplu

Conectarea circuitului serie R, C la o tensiune continuă (fig. 24.11).

Pentru această situație rezultă:

$$q_0 = 0 \tag{24.41}$$

$$q_p = C \cdot E \tag{24.42}$$

$$q_{p0} = C \cdot E \tag{24.43}$$

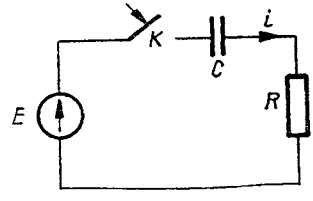


Fig. 24.11

Înlocuind relațiile (24.41), (24.42) și (24.43) în (24.39), se obține sarcina de regim tranzitoriu:

$$q = CE - CE \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{24.44}$$

Curentul din circuit în regim tranzitoriu este:

$$i = \frac{dq}{dt} = CE \cdot \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{24.45}$$

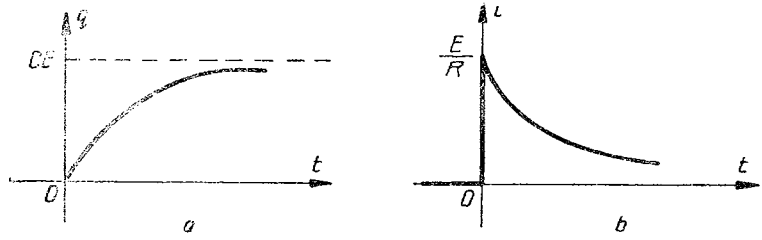


Fig. 24.12

care, cu (24.40) se scrie:

$$i = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{24.46}$$

Reprezentarea grafică a funcțiilor (24.44) și (24.46) este dată în fig. 24.12, *a* și *b*.

24.2.3. Interpretarea constantei de timp a circuitului

Fie, de exemplu, variația sarcinii de pe armătura condensatorului, dată de relația (24.44), care se mai poate scrie:

$$q = q_p\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tag{24.47}$$

și care este reprezentată grafic în figura 24.13. Tangenta în origine la curba $q = f(t)$ intersectează dreapta $q = q_p$ în punctul A. Segmentul OA' este:

$$OA' = \frac{AA'}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{q_p}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{24.48}$$

Dar

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = \frac{q_p}{\tau}. \tag{24.49}$$

Din (24.48) și (24.49), rezultă:

$$\tau = OA'. \tag{24.50}$$

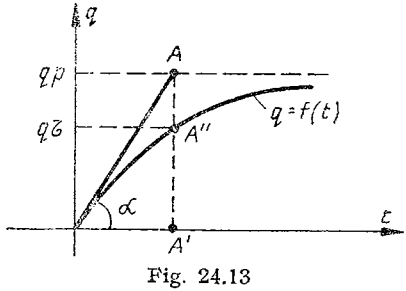


Fig. 24.13

Cu această observație, segmentul $A'A''$ este sarcina q la timpul $t = \tau$, deci:

$$q_\tau = q_p(1 - e^{-1}) = q_p \frac{e-1}{e} = 0{,}632\ q_p. \tag{24.51}$$

Relația (24.50) are următoarea interpretare fizică: *constanta de timp a circuitului (egală cu subtangenta în ori-*

gine a curbei) reprezintă timpul după care mărimea q ar atinge valoarea de regim permanent, dacă ar varia cu aceeași viteză ca și în momentul de imediat după comutare.

Relația (24.51) se interpretează astfel: constanta de timp a circuitului este egală cu timpul după care condensatorul se încarcă cu o sarcină egală cu 0,632 din sarcina de regim permanent.

Interpretări analoage se pot da și pentru circuitul serie R, L.

24.3. REGIMUL TRANZITORIU AL CIRCUITELOR R, L, C SERIE

24.3.1. Expresia generală a curentului și tensiunii în regim tranzitoriu

Se consideră un circuit serie R, L, C alimentat de o tensiune oarecare $u(t)$. Ecuația circuitului se scrie sub forma:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R \cdot i + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t = u(t). \tag{24.52}$$

Utilizînd relațiile cunoscute:

$$q = \int i\,\mathrm{d}t;\ i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \text{ și } \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}, \tag{24.53}$$

ecuația (24.52) devine:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = u(t). \tag{24.54}$$

Soluția de regim tranzitoriu se obține prin suprapunerea soluției generale a ecuației fără membru drept, numită soluție de regim liber, peste soluția particulară a ecuației cu membru drept, numită soluție de regim permanent.

Se caută deci soluția sub forma:

$$q = q_p + q_l \tag{24.55}$$

și, respectiv:

$$i = i_p + i_l. \tag{24.55'}$$

Regimul liber este descris de ecuația:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q_l}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}t} + \frac{q_l}{C} = 0 \tag{24.56}$$

Ecuația caracteristică este:

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0, \tag{24.57}$$

cu rădăcinile:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \tag{24.58}$$

Folosind următoarele notații:

$$\delta = \frac{R}{2L} \text{ (amortizarea circuitului)}; \tag{24.59}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (pulsația proprie a circuitului)}; \tag{24.60}$$

$$\omega_0' = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \text{ (pseudopulsația circuitului)}, \tag{24.61}$$

rezultă:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \omega_0' \tag{24.62}$$

Soluția ecuației (24.56) va fi de forma:

$$q_l = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}, \tag{24.63}$$

iar pentru componenta liberă a curentului, cu (24.53) se găsește:

$$i_l = \frac{dq_l}{dt} = Ap_1 e^{p_1 t} + Bp_2 e^{p_2 t}. \tag{24.64}$$

Constantele A și B se determină din condițiile inițiale, adică pentru $t = 0$, avem: $q = q_0$ și $i = i_0$. Din (24.55) rezultă:

$$q = q - q_p, \tag{24.65}$$

care pentru $t = 0$, devine:

$$q_{l0} = q_0 - q_{p0} \tag{24.66}$$

și de asemenea din (24.64), pentru $t = 0$: $i_{l0} = i_0 - i_{p0}$. (24.67)

Din (24.63) cu (24.66) și din (24.64) cu (24.67), rezultă sistemul:

$$\begin{aligned} A + B &= q_0 - q_{p0} \\ A \cdot p_1 + B \cdot p_2 &= i_0 - i_{p0}, \end{aligned} \tag{24.68}$$

care rezolvat conduce la următoarele valori ale constantelor A și B:

$$A = \frac{p_2(q_0 - q_{p0}) - (i_0 - i_{p0})}{p_2 - p_1}, \tag{24.69}$$

$$B = \frac{p_1(q_0 - q_{p0}) - (i_0 - i_{p0})}{p_1 - p_2}. \tag{24.70}$$

Utilizînd notația (24.62), relația (24.63) se scrie:

$$q_l = Ae^{(-\delta + \omega_0')t} + Be^{(-\delta - \omega_0')t} \tag{24.71}$$

sau:

$$q_l = e^{-\delta t}(Ae^{\omega_0' t} + Be^{-\omega_0' t}) \tag{24.72}$$

Formulele de transformare ale lui Euler:

$$e^{\omega_0' t} = ch\omega_0' t + sh\omega_0' t; \quad e^{-\omega_0' t} = ch\omega_0' t - sh\omega_0' t \tag{24.73}$$

conduc la următoarea formă a relației (24.72):

$$q_l = e^{-\delta t}[(A + B)\ ch\ \omega_0' t + (A - B)\ sh\ \omega_0' t]. \tag{24.74}$$

Înlocuind valorile lui A și B din (24.69) și (24.70), se obține:

$$q_l = e^{-\delta t}[(q_0 - q_{p0})ch\ \omega_0' t + \frac{\delta}{\omega_0'}(q_0 - q_{p0})sh\ \omega_0' t + \frac{1}{\omega_0}(i_0 - i_{p0})sh\ \omega_0' t] \tag{24.75}$$

sau:

$$q_l = e^{-\delta t}[(q_0 - q_{p0})(ch\ \omega_0' t + \frac{\delta}{\omega_0'} sh\ \omega_0' t) + \frac{i_0 - i_{p0}}{\omega_0'} sh\omega_0' t]. \tag{24.76}$$

Cu notația:

$$th\,\alpha' = \frac{\omega_0'}{\delta} \tag{24.77}$$

adică

$$sh\,\alpha' = \frac{\omega_0'}{\omega_0} \text{ și } ch\ \alpha' = \frac{\delta}{\omega_0}, \tag{24.78}$$

se obține în final:

$$q_l = \frac{\omega_0}{\omega_0'} e^{-\delta t}[(q_0 - q_{p0})\quad sh(\omega_0' t + \alpha') + \frac{i_0 - i_{p0}}{\omega_0} sh\omega_0' t]. \tag{24.79}$$

Aceasta reprezintă soluția liberă a sarcinii de pe armătura condensatorului. Soluția completă a sarcinii în regim tranzitoriu se obține apoi cu (24.55).

Soluția de regim liber a curentului este:

$$i_l = \frac{dq_l}{dt} = -\frac{\omega_0}{\omega_0'} e^{-\delta t}[\omega_0(q_0 - q_{p0})\ sh\ \omega_0' t + (i_0 - i_{p0})\ sh\ (\omega_0' t - \alpha')]. \tag{24.80}$$

24.5.2. Conectarea circuitului serie R, L, C la o tensiune constantă (fig. 24.14)

Expresia sarcinii de pe armăturile condensatorului și a curentului din circuit sînt date de relațiile (24.55), în care componentele libere sînt date de (24.79) și (24.80). Mărimile care intervin în aceste relații au valorile:

$$q_0 = 0; \quad q_p = C \cdot E; \quad q_{p0} = C \cdot E \tag{24.81}$$

$$i_0 = 0; \quad i_p = 0; \quad i_{p0} = 0. \tag{24.82}$$

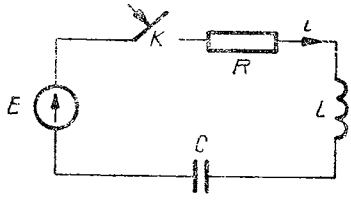


Fig. 24.14

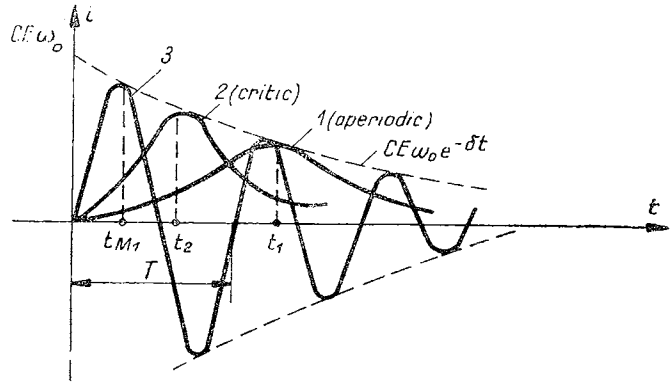


Fig. 24.15

Cu aceste valori, expresia sarcinii şi a curentului capătă formele:

$$q = C \cdot E\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \operatorname{sh}(\omega_0' t + \alpha')\right] \tag{24.83}$$

$$i = C \cdot E \frac{\omega_0^2}{\omega_0'} e^{-\delta t} \operatorname{sh} \omega_0' t. \tag{24.84}$$

Modul de variaţie a acestor funcţii depinde de parametrii R, L şi C ai circuitului. Există trei cazuri deosebite, în funcţie de natura rădăcinilor p_1 şi p_2 (relaţia 24.59) ale ecuaţiei caracteristice.

a) Regimul aperiodic corespunde cazului cînd rădăcinile p_1 şi p_2 sînt reale şi distincte, adică există inegalitatea:

$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{24.85}$$

Pentru acest caz, rămîn valabile expresiile (24.83) şi (24.84).

Să reprezentăm, de exemplu, variaţia curentului, după relaţia (24.84). Efectuăm derivata pentru a găsi extremele:

$$\frac{di}{dt} = CE \frac{\omega_0^2}{\omega_0'} [-\delta e^{-\delta t} \cdot \operatorname{sh} \omega_0' t + \omega_0' e^{-\delta t} \cdot \operatorname{ch} \omega_0' t]. \tag{24.86}$$

Egalînd derivata cu zero şi ţinînd cont de relaţiile (24.78), se obţine valoarea timpului pentru care funcţia (24.84) prezintă un maxim:

$$t_1 = \frac{\alpha'}{\omega_0'}. \tag{24.87}$$

Valoarea curentului la acest moment este:

$$i_1 = \omega_0 \cdot C \cdot E \cdot e^{-\delta t_1}. \tag{24.88}$$

Graficul de variaţie al curentului este dat în figura 24.15 (curba *1*). După cum se vede din relaţia (24.84) curentul nu schimbă de semn deoarece funcţia $\operatorname{sh} \omega_0' t$ este pozitivă pentru orice $t > 0$.

b) Regimul aperiodic critic corespunde cazului cînd discriminantul ecuației caracteristice (24.57) este zero, adică:

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{24.89}$$

În acest caz avem:

$$\delta = \omega_0 \text{ și } \omega_0' = 0. \tag{24.90}$$

Ținînd cont de notațiile (24.78) și trecînd la limită, relațiile (24.83), (24.84) devin:

$$q = CE[1 - (1 + \omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\delta t}] \tag{24.91}$$

$$i = CE\omega_0^2 \cdot t \cdot e^{-\delta t}. \tag{24.92}$$

Pentru reprezentarea funcției (24.92) se face derivata și se egalează cu zero:

$$\frac{di}{dt} = CE\omega_0^2(e^{-\delta t} - \delta \cdot t \cdot e^{-\delta t}) = 0. \tag{24.93}$$

Valoarea timpului, pentru care curentul trece prin maxim este (din 24.93):

$$t_2 = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\omega_0}. \tag{24.94}$$

Curentul în acest moment are valoarea:

$$i_2 = CE \cdot \omega_0 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \cdot CE\omega_0. \tag{24.95}$$

Graficul de variație al funcției (24.92) este reprezentat în figura 24.15 (curba 2). Și în acest caz curentul i este numai pozitiv, așa cum se observă din 24.92 (pentru $t > 0$).

c) Regimul oscilant corespunde cazului cînd rădăcinile p_1 și p_2 sînt complex conjugate, adică există inegalitatea:

$$\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{24.96}$$

Valoarea ω_0' din (24.61) devine o mărime imaginară, și făcînd în acest caz notațiile:

$$\omega_0'' = j\omega_0' \tag{24.97}$$

$$\alpha'' = j\alpha' \tag{24.98}$$

relațiile (24.83) și (24.84) capătă forma:

$$q = CE\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_0''} e^{-\delta t} \sin(\omega_0'' t + \alpha'')\right] \tag{24.99}$$

$$i = CE \frac{\omega_0^2}{\omega_0''} e^{-\delta t} \sin \omega_0'' t \cdot \tag{24.100}$$

Curentul, dat de relaţia (24.100), este mărimea alternativă sinusoidală, a cărei amplitudine scade în timp după exponenţiala $e^{-\delta t}$. Făcînd derivata şi egalînd-o cu zero:

$$\frac{di}{dt} = CE\frac{\omega_0^2}{\omega_0''}[\omega_0'' e^{-\delta t}\cos\omega_0'' t - \delta e^{-\delta t}\cdot\sin\omega_0'' t] = 0 \qquad (24.101)$$

rezultă relaţia:

$$\sin(\omega_0'' t - \alpha'') = 0. \qquad (24.102)$$

Deci extremele se vor găsi pentru timpii:

$$t_M = \frac{\alpha''}{\omega_0''} + k\frac{\pi}{\omega_0''}. \qquad (24.103)$$

Rezultă că maximele (pozitive) se succed cu o perioadă:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0''}. \qquad (24.104)$$

Reprezentarea grafică a funcţiei (24.100) este dată în figura 24.15 (curba 3) Dacă se consideră două maxime consecutive ale curentului, ele vor fi date de relaţiile:

$$i_{M_1} = CE\frac{\omega_0^2}{\omega_0''}e^{-\delta\frac{\alpha''}{\omega_0''}}\sin\alpha'' \qquad (24.105)$$

$$i_{M_2} = CE\frac{\omega_0^2}{\omega_0''}e^{-\delta\left(\frac{\alpha''}{\omega_0''}+T\right)}\cdot\sin(\alpha''+2\pi). \qquad (24.106)$$

Deoarece $\sin\alpha'' = \sin(\alpha''+2\pi)$, raportul celor două maxime este:

$$\frac{i_{M_1}}{i_{M_2}} = e^{\delta T}. \qquad (24.107)$$

Logaritmînd se obţine:

$$\delta T = \ln\frac{i_{M_1}}{i_{M_2}}. \qquad (24.108)$$

Produsul δT se numeşte „decrementul logaritmic" al oscilaţiilor şi este o mărime importantă în studiul regimurilor tranzitorii oscilante.

24.4. METODA OPERAŢIONALĂ DE ANALIZĂ A CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM TRANZITORIU

Metoda operaţională de calcul a regimurilor tranzitorii a fost imaginată de Heaviside. În principiu ea constă în reprezentarea simbolică a derivatei $\frac{d}{dt}$ prin operatorul s, respectiv a integralei prin operatorul $\frac{1}{s}$.

Fundamentul matematic al acestui calcul operațional constă în aplicarea *transformatei Laplace*. Aplicînd transformata Laplace unei ecuații integro-diferențiale, ea devine o ecuație algebrică de variabilă s. Se rezolvă ecuația algebrică în s și, aplicînd apoi transformata Laplace inversă, se obține soluția generală a ecuației integro-diferențiale.

24.4.1. Transformatele Laplace ale unor funcții uzuale

Transformata Laplace a unei funcții $f(t)$, notată cu simbolul $\mathfrak{L}[f(t)]$ sau $F(s)$, este definită cu ajutorul integralei:

$$\mathfrak{L}\,[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt, \tag{24.109}$$

unde operatorul s este un număr complex de forma:

$$\underline{s} = \sigma + j\omega. \tag{24.110}$$

Pentru simplificare, deși s este un număr complex, el nu se va reprezenta subliniat. În relația (24.109) $f(t)$ se numește funcție *original*, iar $F(s)$ se numește *imagine*.

Pentru a se putea aplica transformata Laplace unei funcții $f(t)$, funcția trebuie să îndeplinească următoarele condiții: $f(t)$ să fie netedă pe porțiuni; $f(t)$ trebuie să crească mai lent decît funcția $e^{\sigma t}$, deoarece în caz contrar integrala (24.109) nu are limită; $f(t) = 0$ pentru $t < 0$. În general, toate funcțiile din electrotehnică satisfac primele două condiții. A treia condiție nu este satisfăcută în cazul condensatoarelor de către tensiunea la bornele condensatorului u_c și atunci se procedează astfel:

$$u_c = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i\,dt + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i\,dt = U_{C_0} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i\,dt. \tag{24.111}$$

S-a descompus funcția u_c în două componente din care prima $U_{C(0)}$ este constantă. Cu această descompunere este îndeplinită și cea de a treia condiție în transformata Laplace.

În cele ce urmează se dau transformatele Laplace ale celor mai uzuale funcții.

a. **Transformata Laplace a funcției impuls unitate.** Funcția impuls unitate a lui Dirac este reprezentată în figura 24.16 și este definită de relațiile:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < 0 \\ \infty, \text{ pentru } t = 0 \\ 0, \text{ pentru } t > 0 \end{cases} \tag{24.112}$$

și

$$\int_0^{\varepsilon} \delta(t) \cdot dt = 1; \quad (\varepsilon \to 0). \tag{24.113}$$

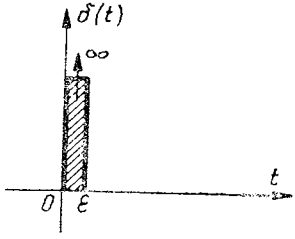


Fig. 24.16

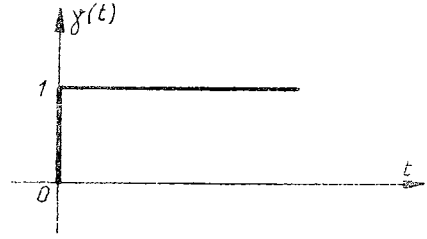


Fig. 24.17

Aplicînd transformata Laplace (relaţia 24.109) funcţiei impuls se obţine:

$$\mathfrak{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\varepsilon} \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t, \tag{24.114}$$

deoarece integrala de la ε la ∞ este nulă, conform (24.112). Întrucît $\varepsilon \to 0$, exponenţiala e^{-st} poate fi considerată egală cu unitatea în intervalul $0 \div \varepsilon$, deci în final:

$$\mathfrak{L}[\delta(t)] = \int_0^{\varepsilon} \delta(t)\mathrm{d}t = 1, \tag{24.115}$$

conform definiţiei (24.113).

b. Imaginea funcţiei treaptă unitate $\gamma(t)$. Funcţia treaptă unitate este reprezentată în figura 24.17 şi este definită astfel:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t \leqslant 0 \\ 1, \text{ pentru } t > 0. \end{cases} \tag{24.116}$$

Aplicînd relaţia (24.109) se obţine imaginea:

$$\mathfrak{L}[\gamma(t)] = \int_0^{\infty} \gamma(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}. \tag{24.117}$$

c. Imaginea unei sume de funcţii. Este egală cu suma imaginilor funcţiilor:

$$\mathfrak{L}[f_1(t) + f_2(t) + \ldots] = \int_0^{\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \ldots =$$

$$= \mathfrak{L}[f_1(t)] + \mathfrak{L}[f_2(t)] + \ldots \tag{24.118}$$

d. Imaginea unei derivate. Aplicînd relaţia (24.109) şi integrînd prin părţi, se obţine:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st}\,dt = f(t)\cdot e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt = s\mathfrak{L}[f(t)] - f(0). \tag{24.119}$$

e. Imaginea unei integrale. Este dată de relaţia

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}\mathfrak{L}[f(t)], \tag{24.120}$$

care se deduce imediat din (24.119).

f. Imaginea unei exponenţiale e^{at}

$$\mathfrak{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{s-a}. \tag{24.121}$$

Procedînd astfel, se pot deduce imaginile diverselor funcţii. În tabelul 24.1 se dau imaginile celor mai uzuale funcţii:

Tabelul 24.1

Funcţia original $f(t)$	Imaginea sa $\mathfrak{L}[f(t)]$	Funcţia original $f(t)$	Imaginea sa $\mathfrak{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1	$\operatorname{sh} at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\gamma(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\operatorname{ch} at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$e^{\pm at}$	$\dfrac{1}{s\mp a}$	$e^{-at}\cdot\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t\cdot e^{-at}$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	$e^{-at}\cdot\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$	$\dfrac{a}{(s-a)(s-b)}$
$\sin(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{s\cdot\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$	$f'(t)$	$s\mathfrak{L}[f(t)]-f(0)$
$\cos(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{s\cdot\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$	$\displaystyle\int_0^t f(t)\cdot dt$	$\dfrac{1}{s}\mathfrak{L}[f(t)]$

24.4.2. Determinarea funcției original cînd se cunoaște imaginea sa

În principiu, cunoscînd funcția imagine, pentru a obține funcția original, se urmărește scrierea funcției imagine sub una din formele date în tabelul 24.1, iar originalul se obține prin identificarea din acest tabel.

În majoritatea cazurilor întîlnite în electrotehnică, funcția imagine rezultă sub forma unei fracții raționale (raportul a două polinoame în s) de forma:

$$F(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)}, \tag{24.122}$$

în care gradul polinomului de la numitor $P_2(s)$ este mai mare cu cel puțin o unitate decît gradul polinomului de la numărător $P_1(s)$.

Rezolvînd ecuația $P_2(s) = 0$, se găsesc rădăcinile $s_1, s_2, \ldots, s_n$ și (după cum se știe din algebră), fracția rațională (24.122) poate fi scrisă sub forma:

$$F(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{C_n}{s - s_n}, \tag{24.123}$$

în care constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se determină prin identificare.

Avînd scrisă funcția imagine sub forma sumei (24.123), conform tabelului 24.1 rezultă funcția original sub forma unei sume de exponențiale:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot e^{s_k t}. \tag{124.124}$$

Se pot calcula însă constantele C_k direct din (24.122) fără a mai fi nevoie să se facă identificarea în (24.123). În (24.123) se formează produsul $(s - s_k)\frac{P_1(s)}{P_2(s)}$ și se calculează limita sa pentru $s \to s_k$, aplicînd criteriul lui l'Hopital. Rezultă deci:

$$C_k = \lim_{s \to s_k} \left[(s - s_k) \frac{P_1(s)}{P_2(s)} \right] = P_1(s_k) \lim_{s = s_k} \frac{s - s_k}{P_2(s)} = \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)}. \tag{24.125}$$

Introducînd (24.125) în (24.124) se obține funcția original

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} e^{s_k t}, \tag{24.126}$$

în care $P_2'(s_k)$ reprezintă derivata polinomului $P_2(s)$ pentru $s = s_k$. Această relație reprezintă teorema dezvoltării (prin formă) a lui Heaviside.

Exemplu

Să se găsească funcția original a cărei imagine este:

$$F(s) = \frac{2s + 1}{s^2 - 5s + 6} \tag{24.127}$$

Rădăcinile polinomului de la numitor sînt:

$$s_1 = 3\,;\; s_2 = 2. \tag{24.128}$$

Se face identificarea (24.123):

$$\frac{2s+1}{s^2-5s+6} \equiv \frac{C_1}{s-3} + \frac{C_2}{s-2}. \tag{24.129}$$

Deci:

$$2s + 1 \equiv C_1(s-2) + C_2(s-3). \tag{24.130}$$

Pentru $s = 3$, avem:

$$C_1 = 7, \tag{24.131}$$

iar pentru $s = 2$, avem:

$$C_2 = -5. \tag{24.132}$$

Funcţia original va fi conform relaţiei (24.124):

$$f(t) = 7e^{3t} - 5e^{2t}. \tag{24.133}$$

Dacă aplicăm teorema dezvoltării (24.126), avem:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{2s+1}{2s-5}\right]_{s=s_k} \cdot e^{s_k t}. \tag{24.134}$$

Introducînd valorile lui s_k din (24.128), rezultă:

$$f(t) = \frac{2\cdot 3+1}{2\cdot 3-5}e^{3t} + \frac{2\cdot 2+1}{2\cdot 2-5}e^{2t} = 7e^{3t} - 5e^{2t}. \tag{24.135}$$

24.4.3. Utilizarea transformatei Laplace la studiul unor regimuri tranzitorii

Exemple

1. Se consideră circuitul electric din figura 24.18, alimentat la o tensiune electromotoare constantă E şi se cere determinarea curentului de regim tranzitoriu $i(t)$ prin bobină, la închiderea întreruptorului k.

Înainte de comutaţie, curentul prin bobină era dat de relaţia:

$$i(0) = \frac{E}{2R} \tag{24.136}$$

Ecuaţia circuitului după comutaţie (traseul figurat punctat în fig. 24.18) este:

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{24.137}$$

Aplicînd transformata Laplace relaţiei (24.137), se obţine:

$$R\,\mathcal{L}[i(t)] + L\,s\,\mathcal{L}[i(t)] - L\,i(0) = 0. \tag{24.138}$$

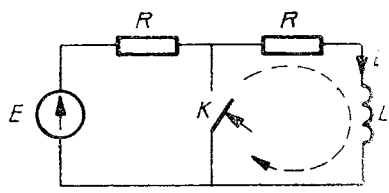


Fig. 24.18

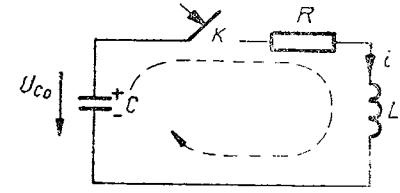


Fig. 24.19

Cu (24.136), relația (24.138) devine:

$$\mathfrak{L}[i(t)] = \frac{L\frac{E}{2R}}{R + sL} = \frac{E}{2R} \cdot \frac{1}{s + \frac{R}{L}}. \tag{24.139}$$

Utilizînd tabelul 24.1 rezultă în final originalul:

$$i(t) = \frac{E}{2R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{24.140}$$

2. Se consideră un condensator încărcat la tensiunea U_{C0} (fig. 24.19), care urmează a se descărca pe un circuit R, L. Se cere curentul de descărcare.

Ecuația circuitului (traseul punctat din figură) este

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt - U_{C_0} = 0. \tag{24.141}$$

Aplicînd transformata Laplace și ținînd cont că $i_{(0)} = 0$, se obține:

$$Ls\mathfrak{L}[i(t)] + R\mathfrak{L}[i(t)] + \frac{1}{sC}\mathfrak{L}[i(t)] = \frac{U_{C_0}}{s}. \tag{24.141'}$$

Ordonînd termenii rezultă:

$$\mathfrak{L}[i(t)] \cdot \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) = \frac{U_{C_0}}{s}. \tag{24.142}$$

Expresia din paranteză se numește *impedanță operațională* și se notează cu $Z(s)$:

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}. \tag{24.143}$$

Această expresie este analoagă cu impedanța complexă utilizată în studiul regimurilor permanente sinusoidale:

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}. \tag{24.144}$$

Impedanța complexă se poate obține din impedanța operațională, dacă operatorul s este un număr pur imaginar (vezi relația 24.110).

Revenind la relația (24.142) se obține imaginea:

$$\mathfrak{L}[i(t)] = \frac{U_{C0}}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}. \tag{24.145}$$

Rădăcinile numitorului fiind:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \omega_0', \tag{24.146}$$

relația (24.145) se scrie:

$$\mathfrak{L}[i(t)] = \frac{U_{C_0}}{L} \cdot \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}. \tag{24.147}$$

Utilizînd tabelul 24.1 găsim funcția original:

$$i(t) = \frac{U_{C_0}}{L} \frac{1}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \tag{24.148}$$

sau, cu (24.146):

$$i(t) = \frac{U_{C_0}}{2\omega_0' L} e^{-\delta t}(e^{\omega_0' t} - e^{-\omega_0' t}) \tag{24.149}$$

sau încă în final expresia curentului de regim tranzitoriu:

$$i(t) = \frac{U_{C_0}}{\omega_0' L} e^{-\delta t} \operatorname{sh} \omega_0' t. \tag{24.150}$$

24.4.4. Legea lui Ohm și teoremele lui Kirchhoff sub formă operațională

Așa cum s-a arătat, aplicînd transformarea Laplace unei ecuații integro-diferențiale, ea se transformă în ecuație algebrică în s. Exemplei le prezentate în par. 24.4.3. arată că o problemă de regim tranzitoriu poate fi rezolvată operațional (prin intermediul transformatei Laplace) prin analogie cu rezolvarea prin metode simbolice a circuitelor de curent alternativ sinusoidal. Folosind ecuații operaționale și scheme electrice operaționale, circuitele în regim tranzitoriu pot fi rezolvate prin aceleași metode ca și circuitele în regim permanent sinusoidal, metodele fiind aceleași (teoremele lui Kirchhoff, metoda curenților independenți, metoda tensiunilor de noduri, metoda generatorului echivalent etc.).

Legea lui Ohm sub formă operațională se obține pentru o latură de circuit care conține elementele R, L, C în serie, bobina fiind cuplată magnetic cu alte laturi de circuit (prin fluxul exterior $\Phi^{ex} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{L} L_{kj} i_j$), xistînd pe latură și un generator de t.e.m. e_g.

În această situație se poate scrie în valori instantanee legea lui Ohm:

$$u + e_g = Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt + L\frac{di}{dt} + \frac{d\Phi^{ex}}{dt} \tag{24.151}$$

sau:

$$u + e_g = Ri + U_{C_0} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i\,dt + \frac{d\Phi}{dt}, \tag{24.152}$$

unde s-a notat:

$$U_{C_0} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i\,dt; \quad \Phi = Li + \Phi^{ex}.$$

Aplicînd transformarea Laplace relației (24.152) se obține:

$$\mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[e_g] = \mathcal{L}[i]\left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) + \frac{U_{C_0}}{s} - \Phi_0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{L} sL_{kj}\mathcal{L}[i_j] +$$

sau (24.153)

$$U(s) + E_g(s) + \Phi_0 - \frac{U_{C_0}}{s} = I(s)\cdot Z(s) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{L} Z_{kj}(s)\cdot I_j(s) \tag{24.154}$$

care reprezintă legea lui Ohm sub formă operațională. În această relație apar transformatele Laplace ale tensiunii la borne $U(s) = \mathcal{L}[u]$, t.e.m. a generatorului din latură $E_g(s) = \mathcal{L}[e_g]$ și curenților din laturi $I(s) = \mathcal{L}[i]$, $I_j(s) = \mathcal{L}[i_j]$. În membrul întîi al relației (24.154) apar termenii Φ_0 (fluxul prin bobină înainte de comutație) și U_{C_0} (tensiunea la bornele condensatorului înainte de comutație). Aceste mărimi (Φ_0 și U_{C_0}) țin cont de condițiile inițiale ale laturii de circuit aflată în comutație. Mărimea $Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$ este impedanța operațională proprie a laturii, iar $Z_{kj}(s) = sL_{kj}$ este impedanța operațională mutuală.

Relației (24.154) i se poate atașa schema echivalentă operațională din figura 24.20.

În absența cuplajului magnetic ($L_{kj} = 0$) și în condiții inițiale de repaus ($\Phi_0 = 0$, $U_{C_0} = 0$), legea lui Ohm capătă forma:

$$U(s) + E_g(s) = I(s)\cdot Z(s), \tag{24.155}$$

identică cu legea lui Ohm din curent continuu.

Prima teoremă a lui Kirchhoff aplicată unui nod q al circuitului, în valori instantanee

$$\sum_{k\in q} i_k = 0 \tag{24.156}$$

se va scrie în operațional sub forma:

$$\sum_{k\in q} I_k(s) = 0. \tag{24.157}$$

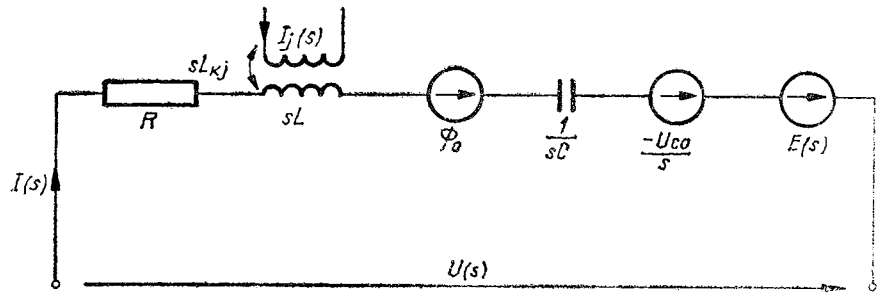


Fig. 24.20

A doua teoremă a lui Kirchhoff în formă operațională se obține pentru un ochi p al unui circuit, făcînd suma relațiilor de tipul (24.154) pentru toate laturile k care aparțin ochiului p și ținînd cont că pe un ochi suma căderilor de tensiune este nulă.

Se obține relația:

$$\sum_{k\in p}\left[E_{gk}(s)+\Phi_{k0}-\frac{U_{Ck0}}{s}\right]=\sum_{k\in p}\left[Z_k(s)\,I_k(s)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{L}Z_{kj}(s)\,I_j(s)\right], \tag{24.158}$$

sau restrîns:

$$\sum_{k\in p}E_{ek}(s)=\sum_{k\in p}\sum_{j=1}^{L}Z_{kj}(s)\cdot I_j(s). \tag{24.159}$$

În această scriere, $E_{ek}(s)$ se numește t.e.m. operațională echivalentă (ține const atît de existența generatoarelor pe laturi e_g cît și de condițiile inițiale ale fluxurilor prin bobine Φ_{k0} și ale tensiunilor la bornele condensatoarelor $\frac{U_{Ck0}}{s}$).

Aplicație

Să se stabilească schema echivalentă operațională și să se scrie teoremele lui Kirchhoff pentru circuitul din figura 24.21, *a*. T.e.m. este continuă, iar în momentul comutației condensatorul era încărcat la o tensiune U_0.

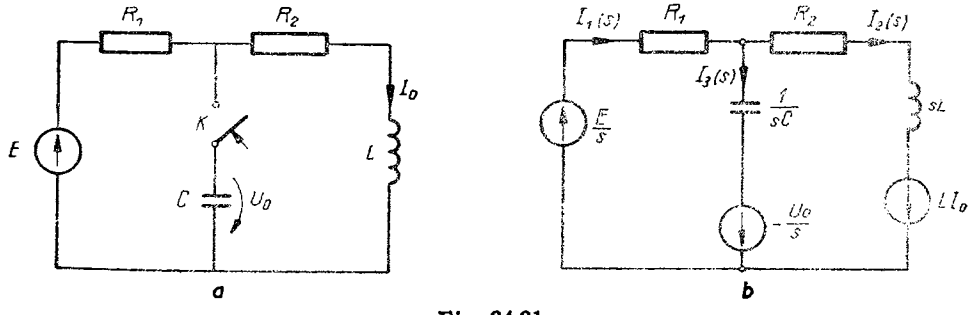


Fig. 24.21

Înainte de comutație, sursa E debita curent continuu în circuitul închis format prin rezistențele R_1, R_2 și bobina L. Valoarea acestui curent era:

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

După comutație, circuitul conține trei laturi și două noduri. În schema operațională apar următoarele surse: E/s care este transformata Laplace a constantei E; LI_0 (îndreptat în sensul curentului I_0) și $-\frac{U_0}{s}$ (îndreptat în sensul tensiunii inițiale U_0). Ultimele două surse apar datorită condițiilor inițiale nenule ale circuitului (există inițial curent prin bobină și sarcină electrică pe condensator).

După stabilirea schemei operaționale din figura 24.21, *b*, teoremele lui Kirchhoff se scriu:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= I_2(s) + I_3(s) \\ \frac{E}{s} - \frac{U_0}{s} &= R_1 I_1(s) + \frac{1}{sC} I_3(s) \\ LI_0 + \frac{U_0}{s} &= (R_2 + sL) I_2(s) - \frac{1}{sC} I_3(s) \end{aligned} \tag{24.160}$$

Observație

Odată stabilită schema echivalentă operațională a unui circuit în regim tranzitoriu (de exemplu cea din figura 24.21, *b*), rezolvarea circuitului se poate efectua prin orice metodă cunoscută de la regimurile permanente: curenți independenți, tensiuni de noduri, generator echivalent, superpoziție etc.

CAPITOLUL 25

STUDIUL REGIMULUI PERMANENT PERIODIC NESINUSOIDAL

În circuitele liniare, sub acțiunea unei t.e.m. sinusoidale

$$e = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \gamma_e)$$

se stabilește un curent sinusoidal și de aceeași frecvență cu t.e.m. (regim permanent sinusoidal).

Dacă circuitul este neliniar sau t.e.m. aplicată unui circuit liniar este nesinusoidală, curentul de regim permanent se va abate de la forma sinusoidală *(regim permanent nesinusoidal)*.

Abaterea curbei de variație în timp a unei tensiuni sau curent de la forma sinusoidală se numește *deformare* sau *distorsiune*.

Se deosebesc două categorii de elemente deformante:

a) de categoria *întîi (elemente neliniare)*. Elementele neliniare distorsionează curentul, chiar la o tensiune aplicată sinusoidală (fig. 25, *a*). Prin redresare, se obține un curent pulsatoriu (fig. 25, *b*), deci redresorul considerat element neliniar rezistiv deformează tensiunea sinusoidală aplicată;

b) de categoria *a doua (elemente reactive liniare)*. Elementele reactive liniare (bobine și condensatoare) deformează tensiunea nesinusoidală aplicată, rezultînd o undă de curent nesinusoidală, diferită de unda tensiunii.

Distorsiunea curentului în raport cu tensiunea nesinusoidală e accentuată de condensatoare și atenuată de bobine.

Efectele deformante sînt utile în electrocomunicații și produc efecte supărătoare în electroenergetică.

Studiul circuitelor liniare în regim periodic nesinusoidal permanent are la bază descompunerea mărimilor nesinusoidale în *serii Fourier (analiza armonică sau spectrală)* și utilizarea superpoziției.

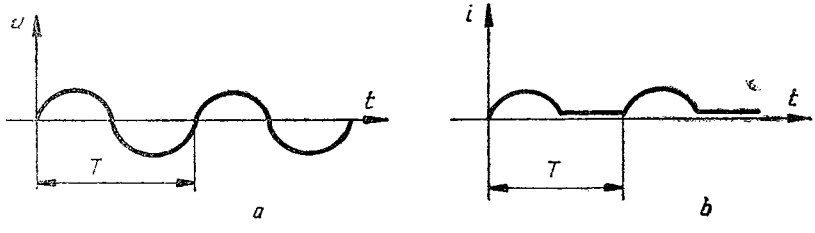


Fig. 25.

25.1. REPREZENTAREA MĂRIMILOR PERIODICE NESINUSOIDALE PRINTR-O SERIE FOURIER

O funcție periodică de timp $f(t) = f(t + T)$, care satisface condițiile lui Dirichlet, se poate dezvolta în serie Fourier (trigonometrică):

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, A_k \sin (k\omega t + \gamma_k) \qquad (25.1)$$

unde:

A_0 este componenta continuă a funcției periodice $f(t)$;

A_k — valoarea efectivă a armonicei de ordinul k;

ω — pulsația fundamentală $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$;

γ_k — faza inițială a armonicei de ordinul k

Relația (25.1) reprezintă *forma restrînsă a seriei Fourier* (termenii cu aceeași pulsație ω apar restrînși într-un termen unic).

În figura 25.1 este reprezentată o funcție periodică $\left(\text{perioada } T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ nesinusoidală. Dacă se scrie dezvoltat relația (25.1):

$$f(t) = A_0 + \sqrt{2}A_1 \sin (\omega t + \gamma_1) + \sqrt{2}\, A_2 \sin (2\omega t + \gamma_2) + \ldots +$$

$$+ \sqrt{2}A_k \sin (k\,\omega t + \gamma_k) + \ldots$$

remarcăm componenta continuă A_0, unda fundamentală sau prima armonică (cu pulsația ω egală cu a semnalului nesinusoidal) și armonicele superioare sau de orinul k (cu pulsația $k\omega$).

O a doua formă de scriere a seriei Fourier pune în evidență armonicele de ordinul k în sinus și cosinus. Dacă se scrie relația (25.1) sub forma:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, A_k (\cos \gamma_k \sin k\omega t + \sin \gamma_k \cos k\omega t)$$

și facem notațiile: $B_k = A_k \cos \gamma_k$; $C_k = A_k \sin \gamma_k$ se obține relația utilizată mult în continuare:

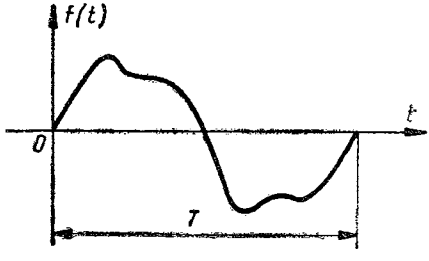


Fig. 25.1.

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, B_k \sin k\omega t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, C_k \cos k\omega t. \qquad (25.2)$$

Relațiile de trecere inversă, de la

forma (25.2) la forma (25.1), sînt imediate:

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2};\ \gamma_k = \operatorname{arctg} \frac{C_k}{B_k}.$$

Determinarea coeficienților Fourier ai seriei ($A_0, \sqrt{2}B_k, \sqrt{2}C_k$) se face cunoscînd analitic sau grafic funcția $f(t)$:

a) Coeficientul A_0 (componenta continuă) se obține integrînd seria (25.2) pe o perioadă:

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T A_0\ \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\ B_k \int_0^T \sin\ k\omega t \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\ C_k \int_0^T \cos\ k\ \omega t \mathrm{d}t.$$

Ultimii doi termeni sînt nuli, deoarece sinusul și cosinusul integrate pe o perioadă dau zero, deci:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\mathrm{d}t; \tag{25.3}$$

componenta continuă A_0 este valoarea medie a funcției $f(t)$ pe o perioadă. Pentru funcțiile alternativ simetrice $A_0 = 0$.

b) Coeficientul $\sqrt{2}\ B_k$ se determină amplificînd $f(t)$ cu $\sin k\omega t$ și integrînd pe o perioadă:

$$\int_0^T f(t) \sin k\omega t \mathrm{d}t = A_0 \int_0^T \sin k\omega t \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\ B_k \int_0^T \sin k\omega t \sin k\omega t\ \mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \int_0^T \cos k\omega t \sin k\ \omega t\ \mathrm{d}t.$$

Ținînd seama că în membrul doi, prima și ultima integrală sînt nule pe o perioadă, iar integrala a doua are valoarea:

$$\int_0^T \sin l\omega t \cdot \sin\ k\omega t\ \mathrm{d}t = \begin{cases} 0, \text{ dacă } l \neq k \\ \dfrac{T}{2}, \text{ dacă } l = k \end{cases}$$

se obține: $\int_0^T f(t) \sin k\omega t\ \mathrm{d}t = \sqrt{2}\ B_k \int_0^T \sin k\omega t \sin k\omega t = \frac{\sqrt{2}B_k}{2}\ T,$

deci:

$$\sqrt{2}\ B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\ \omega t\ \mathrm{d}t. \tag{25.4}$$

c) Coeficientul $\sqrt{2}\,C_k$ se obține prin amplificarea relației (25.2) cu $\cos k\omega t$ și integrare pe o perioadă:

$$\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt = A_0\int_0^T \cos k\omega t\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,B_k\int_0^T \sin k\omega t\cos k\omega t\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,C_k\int_0^T \frac{2}{T}\cos k\omega t\cdot\cos k\omega t\,dt.$$

În membrul doi, primele două integrale se anulează pe o perioadă, iar ultima are valoarea:

$$\int_0^T \cos l\omega t\cdot\cos k\omega t\,dt = \begin{cases} 0, & \text{dacă } l\neq k \\ \dfrac{T}{2}, & \text{dacă } l=k. \end{cases}$$

Rezultă:

$$\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt = \sqrt{2}\,C_k\int_0^T \cos k\omega t\cdot\cos k\omega t\,dt = \frac{\sqrt{2}\,C_k}{2}T,$$

deci:

$$\sqrt{2}\,C_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt. \tag{25.5}$$

În electrotehnică, unde perioada $T = 2\pi$ și faza $\omega t = \alpha$, se scrie uneori seria Fourier și sub forma:

$$f(\alpha) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,B_k\sin k\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,C_k\cos k\alpha. \tag{25.6}$$

Relațiile (25.3), (25.4) și (25.5) se numesc și relațiile Euler-Fourier și au pentru seria Fourier (25.6) expresiile particulare:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cdot d\alpha \\ \sqrt{2}\,B_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha \\ \sqrt{2}\,C_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{25.7}$$

Examinînd graficul funcției $f(\alpha)$ se pot stabili eventualele simetrii ale curbei, care simplifică calculul coeficienților Fourier, în sensul că anumite armonice ar putea lipsi din dezvoltare. Să analizăm unele forme particulare.

25.2.1. Funcția pară (fig. 25.2.)

Curba $f(\alpha)$ este simetrică față de axa ordonatelor $f(\alpha) = +f(-\alpha)$, iar seria conține componenta continuă și armonicele în cosinus ($B_k = 0$). Într-adevăr $\sin(-k\alpha) = -\sin k\alpha$ și $\cos(-k\alpha) = \cos k\alpha$ și deci:

$$f(\alpha) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,B_k \sin k\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}C_k \cos k\alpha,$$

iar
$$f(-\alpha) = A_0 - \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,B_k \sin k\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}C_k \cos k\alpha$$

de unde rezultă:

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,B_k = 0 \quad \text{sau} \quad B_k = 0 \quad \text{și seria devine:}$$

$$f(\alpha) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,C_k \cos k\alpha. \tag{25.8}$$

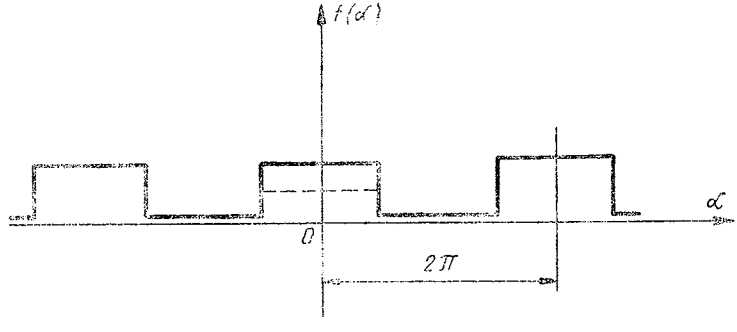


Fig. 25.2.

25.2.2. Funcția impară (fig. 25.3)

Curba $f(\alpha)$ este simetrică față de origine, $f(\alpha) = -f(-\alpha)$, și în dezvoltare apar numai armonicele în sinus ($A_0 = 0$, $C_k = 0$). Aceasta rezultă din identitatea:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}B_k \sin k\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,C_k \cos k\alpha \equiv -\left(A_0 - \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}B_k \sin k\alpha + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,C_k \cos k\alpha\right).$$

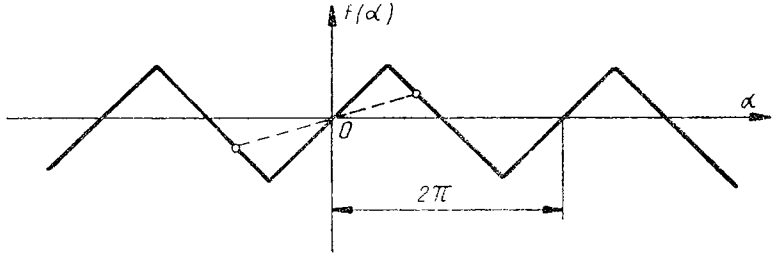


Fig. 25.3.

Identificînd coeficienţii, rezultă $A_0 = 0$, $C_k = 0$, iar seria ia forma:

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\ B_k \sin k\alpha. \tag{25.9}$$

25.2.3. Funcţia alternativ simetrică (fig. 25.4)

Curba $f(\alpha)$ simetrică faţă de abscisă după suprapunerea semiperioadelor se defineşte prin relaţia $f(\alpha) = -f(\alpha + \pi)$. Seria conţine numai armonice impare în sinus şi cosinus ($A_0 = 0$, $B_{2p} = 0$; $C_{2p} = 0$). Într-adevăr:

$$-f(\alpha + \pi) = -A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin(k\alpha + k\pi) - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, C_k \cos(k\alpha + k\pi).$$

a) Dacă $k = 2p$:

$$f(\alpha) = A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2}\, B_{2p} \sin 2p\alpha + \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2}\, C_{2p} \cos 2p\alpha$$

$$-f(\alpha + \pi) = -A_0 - \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} B_{2p} \sin 2p\alpha - \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2}\, C_{2p} \cos 2p\alpha$$

se obţine:

$$A_0 = 0; \qquad B_{2p} = 0; \qquad C_{2p} = 0.$$

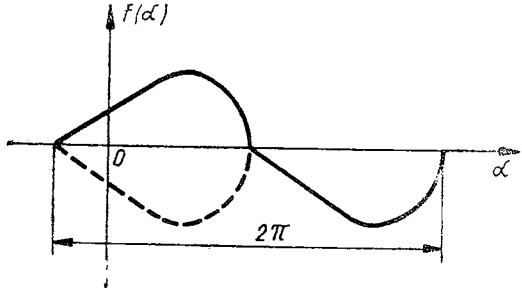


Fig. 25.4.

b) Dacă $k = 2p + 1$:

$$f(\alpha) = A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} B_{2p+1} \cdot$$

$$\cdot \sin(2p + 1)\alpha +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} C_{2p+1} \cdot \cos(2p + 1)\alpha$$

$$-f(\alpha+\pi) = -A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} B_{2p+1} \cdot \sin(2p+1)\alpha +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2}\ C_{2p+1} \cdot \cos(2p+1)\alpha$$

se obține:

$$A_0 = 0;\ B_{2p+1} \neq 0 \text{ și } C_{2p+1} \neq 0.$$

Deci în final seria se scrie:

$$f(\alpha) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2}\, B_{2p+1} \cdot \sin(2p+1)\alpha + \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2}\, C_{2p+1} \cdot \cos(2p+1)\alpha. \qquad (25.10)$$

Observații

1. Funcția *alternativ simetrică* este utilizată frecvent în electrotehnică, motiv pentru care se mai numește și „funcție electrotehnică".

2. Funția alternativ simetrică *pară* posedă simetrie față de abscisă după suprapunerea semiperioadelor (fig. 25.5) și simetrie față de ordonată:

$$f(\alpha) \equiv -f(\alpha+\pi);\ f(\alpha) \equiv f(-\alpha).$$

Seria conține numai armonice impare în cosinus:

$$f(\alpha) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} C_{2p+1} \cdot \cos(2p+1)\alpha. \qquad (25.11)$$

3. Funcția alternativ simetrică *impară* are simetrie față de abscisă după suprapunerea semiperioadelor și simetrie față de origine (fig. 25.6):

$$f(\alpha) \equiv -f(\alpha+\pi) \text{ și } f(\alpha) \equiv -f(-\alpha). \qquad (25.6)$$

Seria conține numai armonice impare în sinus:

$$f(\alpha) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} B_{2p+1} \sin(2p+1)\alpha. \qquad (25.12)$$

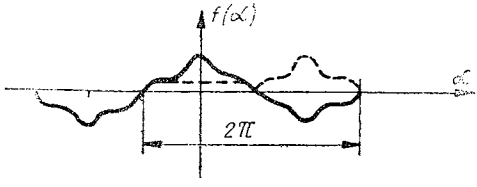


Fig. 25.5.

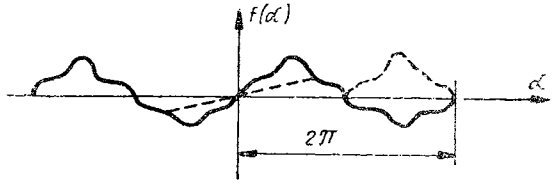


Fig. 25.6.

Aplicație

Dezvoltarea în serie Fourier a unei unde dreptunghiulare cunoscută analitic (fig. 25.7). Fie un semnal dreptunghiular de amplitudine A avînd exprimarea analitică:

$$f(\alpha) = \begin{cases} A, & \text{pentru } 0 < \alpha < \pi \\ -A, & \text{pentru } \pi < \alpha < 2\pi. \end{cases}$$

Funcția $f(\alpha)$ fiind alternativ simetrică impară va conține numai armonice impare în sinus ($A_0 = 0$; $B_{2p} = 0$; $C_k = 0$):

$$f(\alpha) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2}\, B_{2p+1} \cdot \sin (2p + 1)\alpha.$$

Într-adevăr, cu relațiile (25.7) avem:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} A\,\mathrm{d}\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} (-A)\mathrm{d}\alpha\right] = \frac{A}{2\pi}\left(\alpha\Big|_0^{\pi} - \alpha\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = 0, \tag{25.13}$$

apoi:

$$\sqrt{2}\,C_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cdot\cos k\alpha \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} A \cdot \cos k\alpha\, \mathrm{d}\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} (-A) \cdot \cos k\alpha\, \mathrm{d}\alpha\right]$$

$$\sqrt{2}C_k = \frac{A}{\pi}\left(\frac{\sin k\alpha}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin k\alpha}{k}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = 0 \tag{25.14}$$

și, în fine:

$$\sqrt{2}B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot \sin k\alpha \cdot \mathrm{d}\alpha = \frac{A}{\pi}\left[-\frac{\cos k\alpha}{k}\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos k\alpha}{k}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right].$$

a) Dacă $k = 2p$:

$$\sqrt{2}B_{2p} = \frac{A}{\pi}\left[-\frac{\cos 2p\alpha}{2p}\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos 2p\alpha}{2p}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = \frac{A}{2p\pi}(-1 + 1 + 1 - 1) = 0,$$

în serie nu apar armonice pare în sinus: $B_{2p} = 0$.

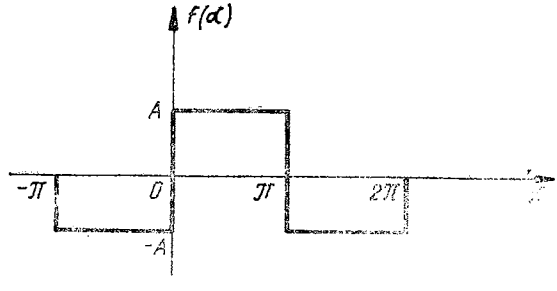


Fig. 25.7

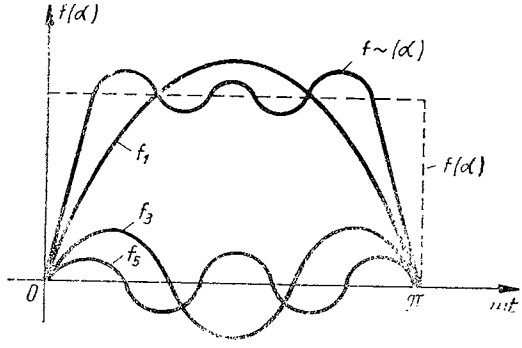


Fig. 25.8.

b) Dacă $k = 2p + 1$:

$$\sqrt{2}B_{2p+1} = \frac{A}{(2p+1)\pi}\left[-\cos(2p+1)\alpha\Big|_0^{\pi} + \cos(2p+1)\alpha\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = \frac{4A}{\pi(2p+1)}. \tag{25.15}$$

Relaţiile (25.13), (25.14) şi (25.15) introduse în (25.6) ne dau seria:

$$f(\alpha) = \frac{4A}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)\alpha}{2p+1} \tag{25.16}$$

sau dezvoltat şi revenind la notaţia $\alpha = \omega t$:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right). \tag{25.17}$$

Cu cît se consideră mai multe armonice, cu atît se obţine o curbă mai apropiată de un dreptunghi. Dacă aproximăm funcţia prin suma primilor trei termeni, se obţine:

$$f_{\sim}(\alpha) \cong \frac{4A}{\pi}\sin\omega t + \frac{4A}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{4A}{5\pi}\sin 5\omega t$$

cu reprezentarea grafică din figura 25.8.

25.3. DETERMINAREA COEFICIENŢILOR SERIEI FOURIER DIN GRAFICUL FUNCŢIEI (METODA THOMSON–RUNGE)

Funcţia periodică ce trebuie dezvoltată în serie Fourier este obţinută adesea experimental, prin oscilografiere. Determinarea coeficienţilor se face în acest caz prin metode aproximative. Metoda cea mai simplă, care constă în aproximarea integralelor (25.7) ce intră în calculul coeficienţilor prin sume, este metoda ordonatelor echidistante sau metoda Thomson-Runge. Perioada 2π se imparte într-un număr de părţi egale $2p$ şi se înlocuiesc integralele prin sume (fig. 25.9). Avem deci:

$$d\alpha \to \Delta\alpha = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p};\quad \alpha \to \frac{n\pi}{p};\quad f(\alpha) \to f_n,$$

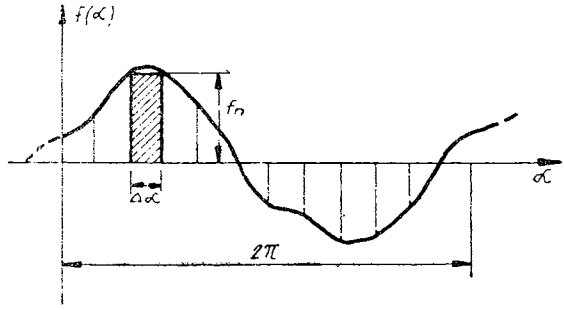


Fig. 25.9.

şi relaţiile (25.7) se transformă în:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p} f_n$$

$$\sqrt{2}B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cdot\sin k\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{2p} f_n\cdot\sin\frac{kn\pi}{p}$$

$$\sqrt{2}C_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cdot\cos k\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{2p} f_n\cdot\cos\frac{kn\pi}{p}. \qquad (25.18)$$

Eroarea făcută prin aproximare este, evident, cu atît mai mică cu cît numărul de intervale $2p$ este mai mare. Practic, pentru curbele din tehnică, se obţin aproximaţii satisfăcătoare pentru $2p = 10 \div 20$. Este indicat să se impartă perioada în 12 părţi $\left(\Delta\alpha = \frac{360°}{12} = 30°\right)$, deoarece calculul se simplifică (valorile lui sinus şi cosinus pentru 30°, 60°, 90°,..., 360° se cunosc).

Relaţiile (25.18) devin de asemenea avantajoase pentru programarea calculului pe maşini electronice de calculat.

25.4 SERIA FOURIER COMPLEXĂ

O funcţie periodică reală $f(t)$ care admite o dezvoltare în serie Fourier sub forma (25.2):

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}B_k\cdot\sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}C_k\cdot\cos k\omega t \qquad (25.19)$$

se poate scrie şi ca sumă a unei serii cu termeni complecşi.

Să dăm lui k valoarea zero şi valori negative şi să vedem ce devin coeficienţii Fourier:

$k = 0$:

$$\sqrt{2}B_0 = 0$$

$$\sqrt{2}C_0 = 2 \cdot \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = 2A_0$$

$k = -k$:

$$\sqrt{2}B_{-k} = -\frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \sin k\omega t \cdot dt = -\sqrt{2}B_k$$

$$\sqrt{2}C_{-k} = +\frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \cos k\omega t\ dt = \sqrt{2}C_k.$$

Se observă că B_k e o funcţie impară de k, iar C_k o funcţie pară :

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}C_0}{2};\quad B_{-k} = -B_k;\quad C_{-k} = C_k. \tag{25.20}$$

Seria (25.19) se poate aduce la forma :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}B_k \cdot \sin k\omega t + \sqrt{2}C_k \cdot \cos k\omega t\right). \tag{25.21}$$

Într-adevăr pentru :

$k > 0$ se obţin jumătate din termenii seriei (25.19) ;

$k = 0$ rezultă termenul liber al seriei : $\frac{\sqrt{2}C_0}{2} = A_0$;

$k < 0$ se obţine cealaltă jumătate a termenilor seriei (25.19).

Înlocuind sinusul şi cosinusul cu relaţiile lui Euler :

$$\sin k\omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}\right)$$

$$\cos k\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}\right)$$

seria (25.21) devine :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{2}(C_k - jB_k)}{4}e^{jk\omega t} + \frac{\sqrt{2}(C_k + jB_k)}{4} \cdot e^{-jk\omega t}\right] \tag{25.22}$$

Deoarece pentru $k < 0$ se obţin aceleaşi valori ca pentru $k > 0$, se pot restrînge termenii seriei (25.22) şi se obţine :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}(C_k - jB_k)}{2}e^{jk\omega t}. \tag{25.23}$$

Dacă introducem noţiunea de amplitudine spectrală complexă $\sqrt{2}\underline{F}_k$:

$$\sqrt{2}\underline{F}_k = \frac{\sqrt{2}(C_k - jB_k)}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot e^{-jk\omega t} \cdot dt \qquad (25.24)$$

obţinem forma finală a seriei Fourier complexă:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2}\underline{F}_k \cdot e^{+jk\omega t}. \qquad (25.25)$$

Amplitudinea armonicelor unui semnal este dublul modulului amplitudinilor complexe spectrale:

$$\sqrt{2}A_k = 2\sqrt{2}F_k. \qquad (25.26)$$

Într-adevăr:

$$F_k = |\underline{F}_k| = \frac{\sqrt{B_k^2 + C_k^2}}{2} = \frac{A_k}{2}.$$

Mulţimea amplitudinilor armonicelor unui semanl $\sqrt{2}A_k$ se numeşte *spectrul de amplitudine* al senalului şi se reprezintă grafic ca un şir discret de valori, în funcţie de pulsaţie.

Exemplu

Să se traseze spectrul de amplitudine pentru un semnal dreptunghiular de amplitudine A (fig. 25.10). Seria Fourier a semnalului conţine numai armonice impare în sinus (relaţia 25.17). Ne limităm la armonica a şaptea:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + \ldots\right)$$

Să scriem amplitudinile armonicelor:

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} = B_k, \text{ unde } C_k = 0.$$

Deci: $\sqrt{2}A_k = \sqrt{2}B_k$. Pentru seria (25.17) amplitudinile armonicelor sînt:

$$\sqrt{2}A_1 = \frac{4A}{\pi};\ \sqrt{2}A_3 = \frac{4A}{3\pi};\ \sqrt{2}A_5 = \frac{4A}{5\pi};\ \sqrt{2}A_7 = \frac{4A}{7\pi}.$$

Cu aceste valori, s-a trasat spectrul de amplitudine al semnalului (25.17) în figura 25.11.

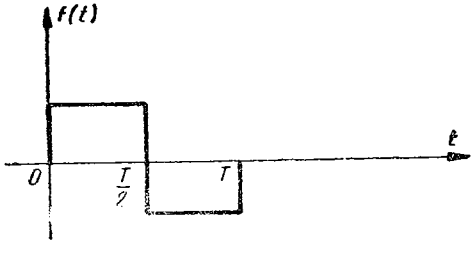


Fig. 25.10.

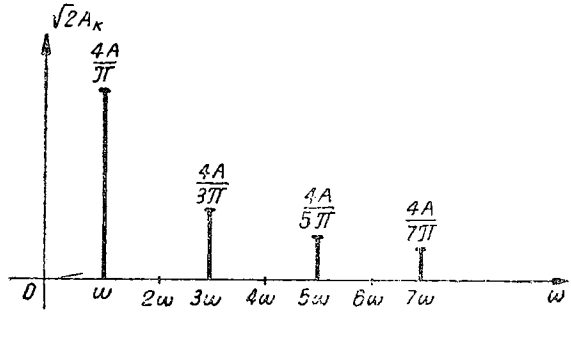


Fig. 25.11.

25.5. VALORI CARACTERISTICE ALE MĂRIMILOR PERIODICE NESINUSOIDALE

Mărimile periodice nesinusoidale sînt caracterizate prin valoarea efectivă şi coeficienţii de formă.

Valoarea efectivă sau **eficace** a unui mărimi periodice este definită de expresia:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}, \quad \text{de unde } A^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt. \tag{25.27}$$

Fie o mărime periodică nesinusoidală:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}A_k \cdot \sin(k\omega t + \gamma_k)$$

a cărei valoare efectivă ne propunem să o determinăm. Putem scrie:

$$f^2(t) = A_0^2 + 2A_0 \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}A_k \cdot \sin(k\omega t + \gamma_k) + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)\right]^2$$

sau:

$$f^2(t) = A_0^2 + 2\sqrt{2}A_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k) + \sum_{k=1}^{\infty} 2A_k^2 \cdot \sin^2(k\omega t + \gamma_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{\infty} 2A_k A_l \cdot \sin(k\omega t + \gamma_k) \cdot \sin(l\omega t + \gamma_l).$$

Intervin următoarele integrale:

$$\int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_k)dt = 0$$

$$\int_0^T \sin^2(k\omega t + \gamma_k)dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2(k\omega t + \gamma_k)\,dt\right] = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_k) \cdot \sin(l\omega t + \gamma_l)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \cos[(k-l)\omega t + \gamma_k - \gamma_l]dt - \frac{1}{2}\int_0^T \cos[(k+l)\omega t + \gamma_k + \gamma_l]dt = 0,$$

deoarece: $l \neq k$.

Înlocuind în expresia (25.27) pe $f^2(t)$, se obține:

$$A^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T A_0^2\,dt + \frac{2\sqrt{2}\,A_0}{T}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_k)\,dt +$$

$$+ \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \int_0^T \sin^2(k\omega t + \gamma_k)\,dt + \frac{2}{T}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_k) \cdot$$

$$\cdot \sin(l\,\omega t + \gamma_l)\,dt$$

$$A^2 = \frac{1}{T} \cdot A_0^2 \cdot T + 0 + \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \cdot \frac{T}{2} + 0,$$

de unde în final:

$$A = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2} = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_k^2 + \ldots} \qquad (25.28)$$

Valoarea efectivă a unei mărimi periodice nesinusoidale este rădăcina pătrată a sumei pătratelor valorilor efective ale armonicelor și a pătratului componentei continue. Particularizînd, obținem pentru valoarea efectivă a curentului și tensiunii periodice nesinusoidale, expresiile:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots} \qquad (25.29)$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_k^2 + \ldots} \qquad (25.30)$$

Caracterizarea formei mărimilor periodice se face utilizînd trei coeficienți:

a) coeficientul de distorsiune K_d;
b) coeficientul sau factorul de vîrf K_v;
c) coeficientul sau factorul de formă K_f.

a) Coeficientul de distorsiune K_d este raportul dintre valoarea efectivă a tuturor armonicelor superioare și valoarea efectivă a componentei alternative a mărimii:

$$K_d = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots}}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots}} = \frac{I_d}{\sqrt{I^2 - I_0^2}}. \qquad (25.31)$$

Valoarea efectivă I_d a armonicelor superioare se numește reziduu deformant. În expresia lui K_d nu intervine componenta continuă I_0, deoarece aceasta nu afectează forma. Coeficientul de distorsiune este pozitiv și subunitar:

$$0 \leqslant K_d \leqslant 1.$$

În electroenergetică o mărime se consideră sinusoidală dacă are un coeficient de distorsiune $K_d < 5\%$.

Aplicație

Să determinăm coeficientul de distorsiune pentru o undă dreptunghiulară de amplitudine A, care are serie Fourier (25.17).

Componenta continuă e nulă $I_0 = 0$, iar valoarea efectivă este dată de:

$$I^2 = I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \ldots\ldots$$

Reziduul deformant este deci:

$$I_d = \sqrt{I^2 - I_1^2}.$$

Coeficientul de distorsiune devine:

$$K_d = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I}$$

unde:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A^2 \cdot dt} = A \quad \text{și} \quad I_1 = \frac{4A}{\pi\sqrt{2}}.$$

Înlocuind valorile, se obține:

$$K_d = \frac{\sqrt{A^2 - \frac{16A^2}{2\pi^2}}}{A} = \sqrt{\frac{\pi^2 - 8}{\pi^2}} = 0{,}4\,; \quad K_d = 40\%. \tag{25.32}$$

În regim sinusoidal, coeficientul de distorsiune este nul ($K_d = 0$).

b) Coeficientul sau *factorul de vîrf* reprezintă raportul dintre amplitudinea și valoarea efectivă a funcției periodice:

$$K_v = \frac{I_{max}}{I}. \tag{25.33}$$

Pentru unda dreptunghiulară $K_v = \frac{A}{A} = 1$, iar în regim sinusoidal $K_v = \frac{\sqrt{2}I}{I} = \sqrt{2}$.

c) Coeficientul sau *factorul de formă* K_f este raportul dintre valoarea efectivă și valoarea medie pe o semiperioadă pozitivă:

$$K_f = \frac{I}{\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} i\,dt}, \tag{25.34}$$

unde t_0 este momentul în care mărimea i trece prin zero cu valori crescătoare.

Pentru unda dreptunghiulară $K_f = \frac{A}{A} = 1$, iar pentru unda sinusoidală $K_f = 1{,}11$. Acești coeficienți sînt dați în tabelul 25.1.

Tabelul 25.1

Forma undei	K_d	K_v	K_f
sinusoidală (armonică)	0	$\sqrt{2} = 1{,}41$	1,11
dreptunghiulară	40%	1	1

Coeficienții K_d, K_v și K_f nu caracterizează complet forma mărimilor periodice, deoarece nu țin seama de defazajele relative ale armonicelor (există o infinitate de mărimi diferite ca formă, cu aceiași coeficienți K_d, K_v și K_f).

Mai recent se utilizează pentru caracterizarea mărimii și formei unei funcții periodice un ansamblu de trei mărimi denumite *cantitate, variație și variabilitate.*

25.6. PUTERI ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Fie un dipol (fig. 25.12) receptor (R) cu tensiune la borne u, parcurs de curentul i. În regim periodic nesinusoidal avem:

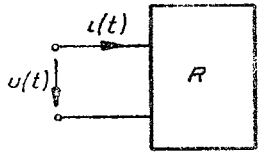


Fig. 25.12.

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{și} \quad i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k.$$

Puterea instatanee p în regim periodic nesinusoidal este definită de expresia:

$$p = u \cdot i = \left(U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k\right). \qquad (25.35)$$

Puterea activă P reprezintă media pe o perioadă a puterii instantanee:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p \cdot \mathrm{d}t. \qquad (25.36)$$

Făcînd înlocuirile cu (25.35), avem:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left(U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_k\right)\mathrm{d}t$$

sau:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[U_0 I_0 + U_0 \sum_{k=1}^{\infty} i_k + I_0 \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \sum_{k=l=1}^{\infty} u_k \cdot i_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_k \cdot i_l\right]\mathrm{d}t,$$

unde:

$$u_k = \sqrt{2}U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk});$$

$$i_k = \sqrt{2}I_k \sin(k\omega t + \gamma_{ik});$$

$$\varphi_k = \gamma_{uk} - \gamma_{ik}.$$

Intervin în expresia lui P următoarele integrale:

$$\int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_{ik})\,dt = 0; \quad \int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_{uk})\,dt = 0$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) \cdot \sin(k\omega t + \gamma_{ik})\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \cos(\gamma_{uk} - \gamma_{ik})\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}T\cos(\gamma_{uk} - \gamma_{ik}) = \frac{T}{2}\cos\varphi_k$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) \cdot \sin(l\,\omega t + \gamma_{il}) = 0.$$

Puterea activă devine:

$$P = \frac{1}{T}\left[\int_0^T U_0 I_0\,dt + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}U_k \cdot \sqrt{2}I_k \int_0^T \cos(\gamma_{uk} - \gamma_{ik})\,dt\right]$$

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot I_k \cdot \cos\varphi_k \quad [\mathrm{W}]. \tag{25.37}$$

Puterea activă în regim periodic nesinusoidal este dată de puterea de curent continuu şi suma puterilor active corespunzătoare fiecărei armonice.

Puterile active ale armonicelor sînt diferite de zero numai dacă armonicele respective apar simultan în curba tensiunii şi curentului.

Puterea reactivă în regim nesinusoidal Q este definită de relaţia:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot I_k \cdot \sin\varphi_k \quad [\mathrm{VAR}] \tag{25.38}$$

prin analogie cu puterea reactivă în regim sinusoidal.

Puterea aparentă S se defineşte, ca şi în regimul sinusoidal, prin produsul valorilor efective ale tensiunii şi curentului:

$$S = U \cdot I \quad [\mathrm{VA}] \tag{25.39}$$

unde:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_k^2 + \ldots} \text{ şi } I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots}.$$

Spre deosebire de regimul sinusoidal unde $S^2 = P^2 + Q^2$, în regimul nesinusoidal $S^2 \neq P^2 + Q^2$.

Puterea deformantă D noțiune care a fost introdusă de profesorul C. Budeanu, în studiul regimurilor permanente nesinusoidale, este o mărime nouă care împreună cu celelalte puteri satisface egalitatea:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2. \tag{25.40}$$

Unitatea de putere deformantă se numește volt amper deformant și se notează prin VAD. Puterea deformantă se obține din (25.40):

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \tag{25.41}$$

și cu relațiile (25.38), (25.36) și (25.37) ea se ascrie dezvoltat:

$$D = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ n<m}}^{\infty} [U_m^2 I_n^2 + U_n^2 \cdot I_m^2 - 2U_m I_n U_n I_m \cdot \cos(\varphi_m - \varphi_n)]}, \tag{25.42}$$

unde φ_m este defazajul între U_m și I_m, iar φ_n este defazajul între U_n și I_n.

Factorul de putere în regim nesinusoidal se definește ca raportul dintre puterea activă și aparentă:

$$K = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}. \tag{25.43}$$

Factorul de putere ($0 \leqslant K \leqslant 1$) este înrăutățit în regim nesinusoidal datorită prezenței puterii deformante $D \neq 0$. Pentru a avea un factor de putere unitar este necesar ca $Q = 0$ și $D = 0$ (din 25.43).

Pentru $Q = 0$, avem $\varphi_k = 0$ (din 25.37), adică:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_k = \ldots = 0. \tag{25.44}$$

Defazajele între armonicele de tensiune și curent corespunzătoare trebuie să fie nule. Pentru $D = 0$, e necesar din (25.42) cu (25.44) să avem:

$$U_m^2 I_n^2 + U_n^2 \cdot I_m^2 - 2U_m \cdot I_n \cdot U_n \cdot I_m = 0$$

$$(U_m I_n - U_n I_m)^2 = 0$$

adică:

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U_n}{I_n}, \text{ deci:}$$

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_3}{I_3} = \ldots = \frac{U_k}{I_k} = \ldots \tag{25.45}$$

Aplicație

Să se calculeze puterile P, Q, S, D, considerînd un circuit dipolar la bornele căruia se aplică o tensiune sinusoidală $U = U_1$, ce dă naștere unui curent nesinusoidal:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots}.$$

Puterea activă P este:

$$P = U_1 I_1 \cdot \cos \varphi_1.$$

Puterea reactivă Q este:

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1.$$

Puterea aparentă S se calculează din:

$$S^2 = U^2 I^2 = U_1^2 (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots).$$

Să separăm în expresia lui S cele trei componente P, Q și D:

$$S^2 = U_1^2 I_1^2 + U_1^2 (I_2^2 + I_3^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots)$$

$$S^2 = \underbrace{U_1^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1}_{P^2} + \underbrace{U_1^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1}_{Q^2} + \underbrace{U_1^2 (I_2^2 + I_3^2 + \ldots + I^2 + \ldots)}_{D^2}.$$

Puterea deformantă D rezultă deci:

$$D = U_1 \sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots}$$

25.7. ANALIZA CIRCUITELOR LINIARE ÎN REGIM PERIODIC PERMANENT ȘI NESINUSOIDAL

Fiind dați parametrii circuitului și tensiunile nesinusoidale aplicate la borne, se cer curenții care se stabilesc în fiecare latură din circuit. În circuitele liniare e valabil principiul suprapunerii efectelor. Descompunînd t.e.m. nesinusoidale (cu ajutorul seriei Fourier) în componenta continuă și armonice (componente sinusoidale), se reduce studiul regimului periodic nesinusoidal la:

a) studiul unui regim de curent continuu (pentru componenta continuă);

b) studiul unor regimuri sinusoidale (pentru fiecare armonică de pulsație k în parte).

Se determină pentru curenții din fiecare latură componenta continuă și armonicele, iar prin suprapunerea lor se obține valoarea instantanee a curenților din laturi.

În analiza circuitului, se poate utiliza reprezentarea în complex pentru fiecare armonică, observînd că la frecvența ωk a armonicei k, reactanțele condensatoarelor vor fi de k ori mai mici, iar ale bobinelor de k ori mai mari decît pentru fundamentală:

$$X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}; \quad X_{Lk} = k\omega L. \tag{25.46}$$

Pentru fiecare armonică, studiul se poate face cu metodele de analiză cunoscute de la regimul permanent sinusoidal.

25.7.1. Rezistorul ideal în regim nesinusoidal (fig. 25.13, *a*)

La bornele unui rezistor ideal r e aplicată o tensiune periodică nesinusoidală u, cu dezvoltarea în serie:

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin (k\omega t + \gamma_{uk}).$$

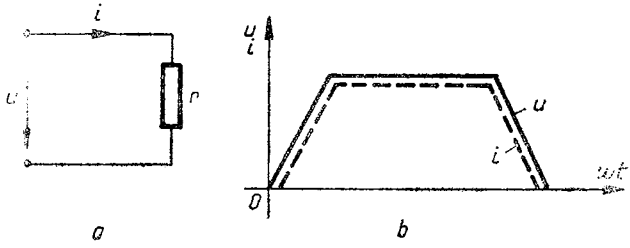


Fig. 25.13

Scriind legea lui Ohm pentru fiecare componentă în parte (continuă şi armonice), rezultă:

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U_0}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} U_k}{r} \sin (k\omega t + \gamma_{uk}). \qquad (25.47)$$

O rezistenţă pură nu modifică forma curentului faţă de cea a tensiunii (unda lui i este asemenea cu unda lui u, fig. 25.13, *b*).

Factorul de distorsiune al curentului este egal cu factorul de distorsiune al tensiunii:

$$K_{di} = K_{du}.$$

25.7.2. Bobina ideală în regim nesinusoidal (fig. 25,14, *a*)

La bornele bobinei se aplică o tensiune nesinusoidală:

$$u = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Curentul ce se stabileşte în circuit în regim permanent este:

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t u \mathrm{d}t = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \sqrt{2}\, U_k \sin (k\omega t + \gamma_{uk}) \mathrm{d}t.$$

Efectuînd integrarea, rezultă curentul instantaneu:

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{U_k}{k\omega L} \sin \left(k\omega t + \gamma_{uk} - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin (k\omega t + \gamma_{ik}), \qquad (25.48)$$

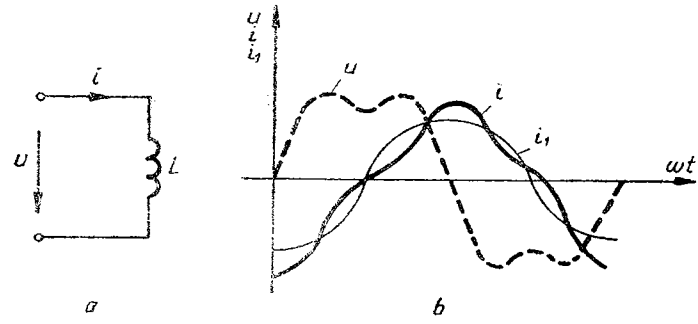


Fig. 25.14

unde:

$$\varphi_k = \gamma_{uk} - \gamma_{ik} = \frac{\pi}{2}; \quad I_k = \frac{U_k}{k\omega L}; \quad Z_k = \frac{U_k}{I_k} = k\omega L. \tag{25.49}$$

Valorile efective ale armonicelor sînt:

$$I_1 = \frac{U_1}{\omega L}; \quad I_2 = \frac{U_2}{2\,\omega L}; \quad I_3 = \frac{U_3}{3\,\omega L}; \ldots. \tag{25.50}$$

O inductivitate reduce distorsiunea curentului față de distorsiunea tensiunii, deoarece prezintă o impedanță proporțională cu ordinul armonicei. La bobine factorul de distorsiune al curentului este mai mic decît factorul de distorsiune al tensiunii ($K_{di} < K_{du}$).

În figura 25.14, *b* se reprezintă tensiunea *u* și curentul *i* printr-o bobină ideală.

25.7.3. Condensatorul ideal în regim nesinusoidal (fig. 25.15, *a*)

La bornele condensatorului se aplică o tensiune nesinusoidală

$$u = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt.$$

Curentul ce se stabilește în circuit este:

$$i = C\frac{du}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk})\right]$$

sau:

$$i = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,k\omega C \cdot U_k \cdot \sin\left(k\omega t + \gamma_{uk} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}I_k \sin(k\omega t + \gamma_{ik}) \tag{25.51}$$

unde:

$$\varphi_k = \gamma_{uk} - \gamma_{ik} = -\frac{\pi}{2}; \quad I_k = k\omega C \cdot U_k; \quad Z_k = \frac{U_k}{I_k} = \frac{1}{k\omega C}. \tag{25.52}$$

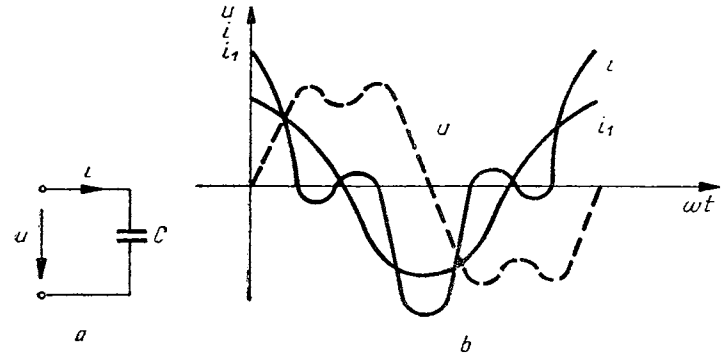


Fig. 25.15

Valorile efective ale armonicelor sînt:

$$I_1 = \omega C \cdot U_1; \quad I_2 = 2\omega C \cdot U_2; \quad I_3 = 3\omega C \cdot U_3; \ldots \qquad (25.53)$$

O capacitate accentuează deformarea curentului față de distorsiunea tensiunii, deoarece impedanța scade cu ordinul armonicei. În figura 25.15,*b* se dă forma de undă a tensiunii și curentului printr-un condensator.

La condensatoare, factorul de distorsiune al curentului e mai mare decît factorul de distorsiune al tensiunii ($K_{di} > K_{du}$).

25.7.4. Circuitul R, L, C în regim nesinusoidal

Circuitul fiind liniar, se aplică teorema superpoziției. Se consideră că în circuit fiecare armonică de tensiune u_k acționează separat și dă naștere unei armonice de curent i_k. Curentul instantaneu din circuit se obține din însumarea armonicelor curentului:

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} i_k.$$

Impedanța armonicei de ordin k are expresia:

$$Z_k = \sqrt{r^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}. \qquad (25.54)$$

Valoarea efectivă a curentului de armonică k este:

$$I_k = \frac{U_k}{Z_k}. \qquad (25.55)$$

Reactanța inductivă și capacitivă corespunzătoare armonicei k variază în mod diferit cu frecvența: reactanța inductivă crește, iar cea capacitivă scade cu ordinul armonicei:

$$X_{Lk} = k\omega L; \quad X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}. \qquad (25.56)$$

25.7.5. Rezonanța în regim nesinusoidal

În circuitul serie se poate defini o rezonanță pentru o armonică de un ordin oarecare k, astfel încît la rezonanță, defazajul $\varphi_k = 0$, adică $X_k = 0$, ceea ce conduce la:

$$X_k = k\omega L - \frac{1}{k\omega C} = 0. \tag{25.57}$$

Condiția de rezonanță pe armonica k este deci:

$$LC\omega^2 = \frac{1}{k^2}. \tag{25.58}$$

În cazul rezonanței pe armonica k, impedanța circuitului pe această armonică e minimă $Z_k = r$, iar curentul are amplitudinea maximă.

25.8. SEMNALE PERIODICE CARE NU SE DEZVOLTĂ ÎN SERIE FOURIER

În practică există mărimi nesinusoidale, reprezentate prin curbe cu înfășurătoare periodică, care nu se dezvoltă în serie Fourier. Vom studia din această categorie fenomenele de bătaie a oscilațiilor și modulația oscilațiilor.

25.8.1. Bătaia oscilațiilor

Prin bătaia oscilațiilor se înțelege variația periodică a unei oscilații rezultante, obținută prin suprapunerea a două oscilații sinusoidale de frecvențe apropiate.

Presupunem că într-un circuit se suprapun doi curenți sinusoidali i_1 și i_2 avînd aceeași valoare efectivă $I = I_1 = I_2$ și pulsații ω_1 și ω_2 apropiate (diferența pulsațiilor este mult mai mică decît fiecare pulsație în parte):

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= I\sqrt{2}\sin\omega_1 t \\ i_2 &= I\sqrt{2}\sin\omega_2 t \end{aligned}\right\} \text{ unde } |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 \cdot \omega_2.$$

Curentul rezultant (oscilația rezultantă) din circuit este:

$$i = i_1 + i_2 = I\sqrt{2}[\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t]. \tag{25.59}$$

Se transformă suma de sinusuri în produs:

$$i = 2I\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \cdot \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \tag{25.60}$$

și se poate scrie

$$i = I_m \cdot \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\cdot t \tag{25.61}$$

unde:

$$I_m = 2I\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t.$$

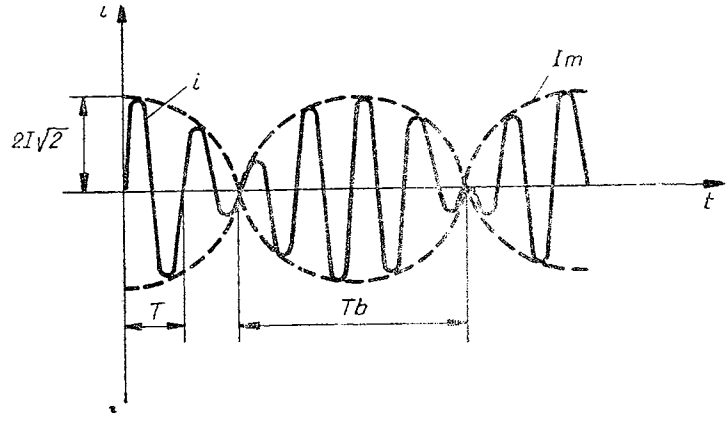


Fig. 25.16

Curba curentului se poate aproxima cu o sinusoidă de pulsație $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$, a cărei amplitudine variază lent după cosinusoida $I_m = 2I\sqrt{2}\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t$. Variația amplitudinii se consideră lentă deoarece:

$$\left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right| \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Frecvența bătăilor f_b este dată de numărul de maxime ale curbei înfășurătoare în unitatea de timp, iar perioada bătăilor $T_b = \frac{1}{f_b}$. Se observă că perioada bătăilor este jumătate din perioada funcției $\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t$ și are valori cu atît mai mari cu cît ω_1 și ω_2 sînt mai apropiate:

$$T_b = \frac{\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}. \tag{25.62}$$

Perioada curentului sinusoidal rezultant este:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}. \tag{25.63}$$

Oscilația dată de (25.60) este reprezentată în figura 25.16.

Fenomenul de bătaie a oscilațiilor se folosește în electroenergetică la punerea în paralel a două generatoare sau cuplarea unui generator în paralel cu rețeaua, pentru a aprecia momentul egalității pulsațiilor (frecvențelor).

25.8.2. Modulația oscilațiilor

Prin modulație se înțelege modificarea amplitudinii, frecvenței sau fazei unui semnal de frecvență înaltă în ritmul unui semnal de frecvență mai redusă, cu scopul transmiterii unei informații. Dacă curentul e dat sub forma:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \gamma_i)$$

se disting trei feluri de modulații: în amplitudine: $I_m = I_m(t)$; în frecvență: $\omega = \omega(t)$ și în fază: $\gamma_i = \gamma_i(t)$.

Semnalul modulator are o frecvență mai mică de cel puțin $2 \div 3$ ori decît frecvența purtătoare și poate conține o informație radio, video, telefonică sau telegrafică.

Unda purtătoare avînd o frecvență înaltă posedă proprietăți remarcabile de propagare și radiație (vezi cap. 27).

Să analizăm succint modulația în amplitudine. Amplitudinea undei purtătoare variază în ritmul semnalului modulator de joasă frecvență Ω:

$$i = I_0\sqrt{2}(1 + m \sin \Omega t) \cdot \sin \omega t. \qquad (25.64)$$

Făcînd notația $I_m = I_0\sqrt{2}(1 + m \sin \Omega t)$, relația (25.64) devine $= I_m \sin \omega t$, unde:

$\sqrt{2}I_0$ este amplitudinea undei purtătoare (nemodulată);

m — gradul de modulație ($0 \leqslant m \leqslant 1$);

Ω — pulsația semnalului modulator;

ω — pulsația semnalului purtător ($\omega \geqslant \Omega$).

Pentru $m = 0$ semnalul este nemodulat, iar la $m = 1$ modulația este 100% (fig. 25.17, *a* și *b*).

Amplitudinea I_m variază în jurul lui $\sqrt{2}I_0$ în ambele sensuri cu valoarea $\sqrt{2}mI_0$, după tăria semnalului modulator. Curba $I_m = \sqrt{2}I_0(1 + m \sin \Omega t)$ se numește înfășurătoare sau anvelopă (fig. 25.18).

Curentul modulat i se mai poate scrie sub forma:

$$i = \sqrt{2}I_0 \sin \omega t + \\ + \sqrt{2} \cdot mI_0 \sin \Omega t \cdot \sin \omega t.$$

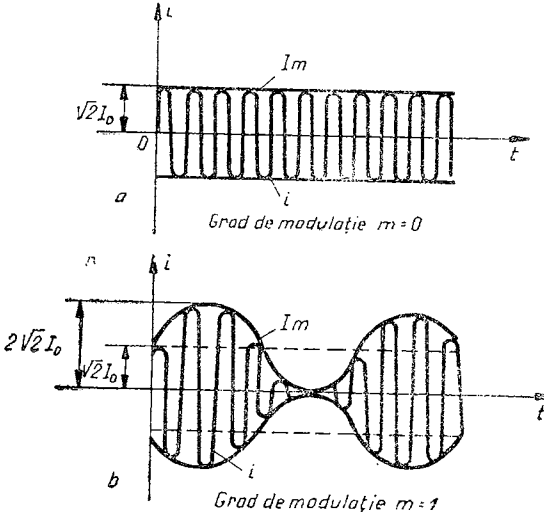


Fig. 25.17. *a*, *b*

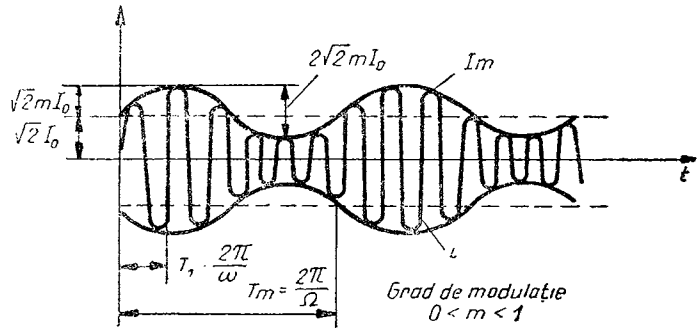


Fig. 12.18.

Se descompune produsul de sinusuri în diferență de cosinusuri:

$$i = \sqrt{2}I_0 \sin \omega t + \frac{\sqrt{2} \cdot mI_0}{2} \cos(\omega - \Omega)t - \frac{\sqrt{2} \cdot m \cdot I_0}{2} \cdot \cos(\omega + \Omega)t.$$

Curentul modulat are trei componente, cu frecvențele ω, $\omega - \Omega$, $\omega + \Omega$ foarte apropiate între ele, dacă $\omega \gg \Omega$.

Componenta de pulsație ω este unda purtătoare, iar componentele cu pulsațiile $\omega - \Omega$ și $\omega + \Omega$ se numesc unde laterale.

Componentele curentului modulat apar sugestiv în spectrul de amplitudine dat în figura 25.19.

25.9. CIRCUITE NELINIARE ÎN REGIM PERMANENT PERIODIC

În regim permanent periodic, în circuitele neliniare intervin ca elemente de circuit rezistoarele neliniare, bobinele neliniare și condensatoarele neliniare. În par. 7.4 au fost prezentate caracteristicile rezistoarelor neliniare și unele metode de analiză a circuitelor neliniare de curent continuu.

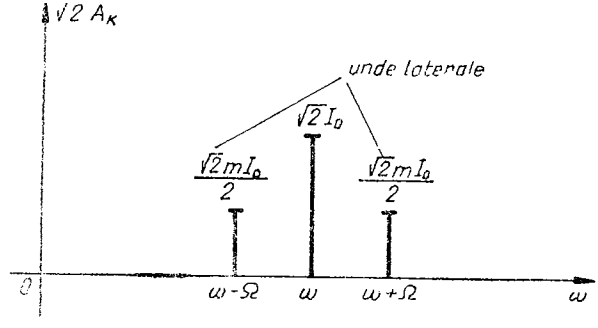


Fig. 25.19.

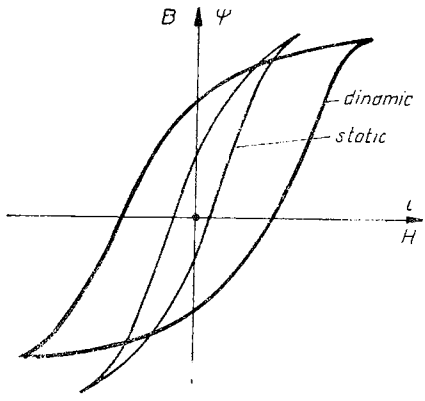


Fig. 25.20

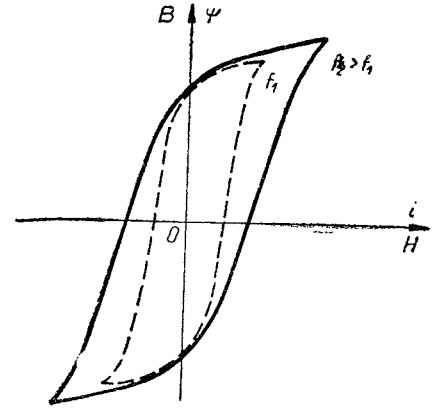


Fig. 25.21

25.9.1. Bobina neliniară

Neliniaritatea bobinei se datorește miezului feromagnetic al ei, care are caracteristica de magnetizare ciclică $B = f_1(H)$ sau $\psi = f_2(i)$ sub forma ciclului de histerezis. Acest ciclu, trasat punct cu punct în curent continuu (ciclul static), diferă de cel obținut în curent alternativ (ciclul dinamic) așa cum arată figura 25.20. Suprafața ciclului de histerezis, care reprezintă energia pierdută în miez în unitatea de volum într-un ciclu de magnetizare, depinde de frecvență (evident și de natura materialului), cum se arată în figura 25.21.

Dacă la o anumită frecvență se trasează cicluri de histerezis pentru diferite valori maxime ale cîmpului magnetic, se obține familia de curbe din figura 25.22. Unind vîrfurile tuturor acestor cicluri se obține curba de *magnetizare fundamentală.*

Din caracteristicile neliniare se definesc parametrii bobinei neliniare:

inductivitatea statică

$$L_s = \frac{\psi}{i} = f_1(i) \qquad (25.65)$$

și *inductivitatea dinamică*

$$L_d = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}i} = f_2(i). \qquad (25.66)$$

În numeroase aplicații ciclul de histerezis se aproximează prin curba de magnetizare fundamentală (această aproximare nu ține cont de pierderile care au loc în miezul bobinei).

În analiza simplificată a circuitelor cu bobine neliniare se aproximează uneori ciclul de histerezis cu o elipsă (vezi și par. 16.7). În această

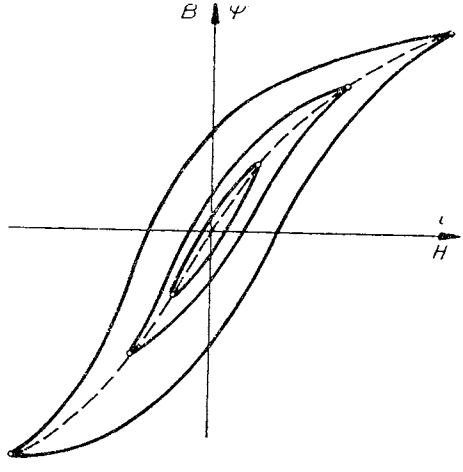


Fig. 25.22

ipoteză se consideră că atît tensiunea la bornele bobinei cît şi curentul prin bobină sînt mărimi sinusoidale, iar neliniaritatea se manifestă numai între valorile maxime ale fluxului în funcţie de curent. Într-o astfel de aproximare se operează cu *inductivitatea aparentă* a bobinei neliniare definită de relaţia:

$$L_a = \frac{\psi_m}{I_m} = \frac{\psi_m}{\sqrt{2}I} = f_3(I). \tag{25.67}$$

Aproximarea caracteristicii bobinei neliniare se poate efectua în mai multe moduri. Astfel avem:

— prin polinoame de puteri:

$$i = a\psi + b\psi^3; \tag{25.68}$$

$$\psi = \alpha i - \beta i^3 \tag{25.69}$$

— prin funcţii transcendente:

$$i = a_1 \operatorname{sh} b_1\psi, \text{ sau} \tag{25.70}$$

$$\psi = \alpha \operatorname{th} \beta i. \tag{25.71}$$

Relaţiile (25.68) ÷ (25.71) nu ţin cont de histerezis, ci numai de neliniaritatea caracteristicii. Următoarele aproximări, deşi sînt mai greu de utilizat, ţin cont şi de histerezis:

$$i = a\psi + b\psi^3 + c\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}, \tag{25.72}$$

sau

$$i = a\psi + b\psi^3 \pm I_m\sqrt{1 - \frac{\psi^2}{\psi_m^2}}. \tag{25.73}$$

Coeficienţii a, b, c, α şi β se determină în general prin metoda alegerii punctelor de coincidenţă, cunoscînd caracteristica $\psi = f(i)$ trasată grafic.

25.9.2. Condensatorul neliniar

Neliniaritatea condensatorului se datoreşte dielectricului feroelectric aflat între armături, care are caracteristica $D = f_1(E)$ sau $q = f_2(u)$ neliniară (vezi par. 2.5). Caracteristica condensatorului neliniar se aseamănă cu caracteristica bobinei neliniare. Despre condensatorul neliniar se pot spune aceleaşi lucruri ca şi despre bobina neliniară respectînd analogia: $B \to D$; $H \to E$; $\psi \to q$; $i \to u$; $L \to C$. Sînt valabile aceleaşi aproximări ale caracteristicii neliniare $q = f(u)$ ca şi pentru $\psi = f(i)$.

25.9.3. Analiza circuitelor neliniare inerţiale

Dacă la bornele unui element neliniar se aplică o tensiune sinusoidală, iar curentul prin element este tot sinusoidal, se spune că acel element neliniar este inerţial. Neliniaritatea se manifestă numai între valorile efective (sau maxime) ale semnalului răspuns (curentul) în funcţie de semnalul

excitație (tensiunea la borne). Elementele neliniare tipic inerțiale sînt lămpile cu incandescență (aceasta datorită inerției termice a filamentului, care nu poate urmări frecvența de variație a tensiunii alternative aplicate ci numai modificarea valorii ei efective).

În scopul de a simplifica analiza circuitelor neliniare se consideră adesea ca elemente inerțiale chiar și bobinele neliniare care sînt tipic neinerțiale.

Marele avantaj al considerării elementelor neliniare ca fiind inerțiale este faptul că semnalul răspuns (curentul) este sinusoidal și se poate face apel la reprezentarea în complex simplificat a mărimilor din circuit, obținîndu-se o rezolvare lejeră a circuitului, ca și în circuite neliniare de curent continuu.

Metodele de rezolvare, și în acest caz, pot fi grafice sau analitice. În practică, circuitele ferorezonante se studiază ca și circuite neliniare inerțiale. Se numește circuit ferorezonant circuitul compus din legarea în serie sau în paralel a unui condensator liniar cu o bobină neliniară (cu miez feromagnetic).

Aplicații

1. Metodă grafică de analiză a circuitului ferorezonant serie (fig. 25.23, *a*).

Circuitul este alimentat de la o tensiune sinusoidală $e = E\sqrt{2}\sin\omega t$. Se cunosc parametrii R,C precum și caracteristica neliniară a bobinei $U_L = f(I)$ dată grafic. Se cere curentul I din circuit.

Ecuația de funcționare a circuitului, în valori instantanee, este:

$$e = R \cdot i + \frac{1}{C}\int i\,dt + u_L, \tag{25.74}$$

care se transcrie în complex:

$$\underline{E} = R\underline{I} + j\left(\underline{U}_L - \frac{1}{\omega C}\underline{I}\right). \tag{25.75}$$

În modul, ecuația (25.75) se scrie

$$E = \sqrt{(RI)^2 + \left(U_L - \frac{1}{\omega C}I\right)^2}. \tag{25.76}$$

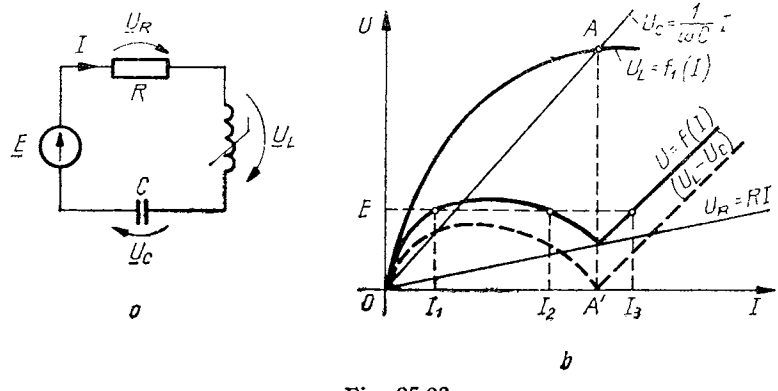


Fig. 25.23

Rezolvarea ecuației (25.76) este dată în graficul din figura 25.23, *b*. Pentru aceasta se construiește caracteristica căderilor de tensiune reactive $\left|U_L - \frac{1}{\omega C} I\right| = |U_L - U_C|$, scăzînd ordonatele parțiale ale curbelor $U_L = f_1(I)$ și $U_C = \frac{1}{\omega C} I$. Se duce apoi dreapta căderii de tensiune pe rezistență $U_R = RI$, care se adună cu caracteristica $|U_L - U_C|$, conform relației (25.76), obținîndu-se caracteristica rezultantă $U = \sqrt{(RI)^2 + (U_L - U_C)^2} = f_1(I)$ a circuitului. Intersecția acesteia cu dreapta $U = E$ determină soluția ecuației (25.76), adică curentul din circuit. Se vede din figură că problema are trei soluții: valorile I_1, I_2 și I_3. În circuitul ferorezonant sînt deci posibile în aceleași condiții trei valori distincte ale curentului (valoarea I_2 este în general nestabilă, ea se poate obține numai dacă rezistența R din circuit are o valoare destul de mare).

2. Metodă analitică pentru determinarea curbelor de rezonanță în circuitul ferorezonant serie (fig. 25.23, *a*).

În par. 17.1 a fost trasată curba de rezonanță $I = f(\omega)$ pentru circuitul liniar serie R, L, C. În această aplicație se urmărește determinarea curbei $I = f(\omega)$ în circuitul serie R, L, C în care bobina este neliniară (cu miez feromagnetic).

Pentru aceasta, se aproximează caracteristica bobinei neliniare prin ecuația (25.68). Presupunînd fluxul sinusoidal, de forma $\psi = \psi_m \sin \omega t$, rezultă curentul:

$$i = a\psi_m \sin \omega t + b\psi_m^3 \sin^3 \omega t. \tag{25.77}$$

Se utilizează în (25.77) dezvoltarea $\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t$ și se obține:

$$i = \left(a\psi_m + \frac{3}{4} b\psi_m^3\right) \sin \omega t, \tag{25.78}$$

unde s-a neglijat armonica de ordin trei ($\sin 3\omega t$).

Inductivitatea echivalentă aparentă a bobinei neliniare (vezi rel. 25.67) are valoarea

$$L_a = \frac{\psi_m}{\sqrt{2}I} = \frac{1}{a + \frac{3}{4} b\psi_m^2}. \tag{25.79}$$

Curentul din circuitul ferorezonant serie rezultă prin analogie cu circuitul serie R, L, C liniar:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L_a - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega}{a + \frac{3}{4} b\psi_m^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{25.80}$$

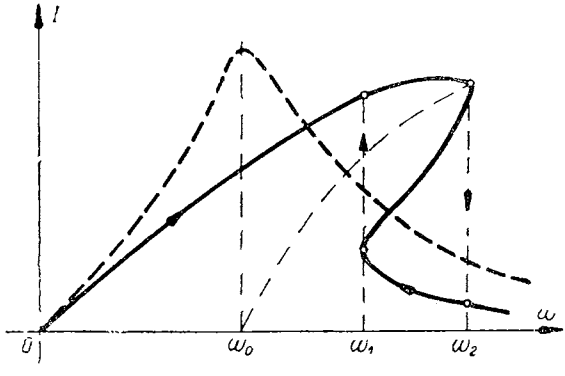


Fig. 25.24

În figura 25.24 este reprezentată curba de rezonanță a circuitului ferorezonant serie $I = f(\omega)$, conform

relației (25.80), ținînd cont și de (25.79). Pe aceeași figură este prezentată și curba de rezonanță a circuitului liniar serie R, L, C (cu linie întreruptă).

Se remarcă faptul că în circuitul ferorezonant apar variații prin salt ale curentului din circuit la modificarea lentă a pulsației ω. Aceste salturi apar în dreptul pulsațiilor ω_1 și ω_2, așa cum indică săgețile de pe figură.

25.9.4. Analiza circuitelor neliniare neinerțiale

Dacă la bornele unui element neliniar neinerțial se aplică o tensiune sinusoidală, curentul din elementul neliniar este nesinusoidal. Neliniaritatea se manifestă deci în valori instantanee.

Considerarea elementelor neliniare ca neinerțiale permite evidențierea unor procese tipic neliniare cum ar fi: redresarea curenților alternativi sau multiplicarea frecvenței.

Analiza circuitelor neliniare neinerțiale cuprinde în general două etape. Prima etapă este obținerea semnalului răspuns (curenții din circuit) cunoscînd caracteristicile neliniare ale elementelor (grafic sau analitic) și semnalul de excitație. A doua etapă este analiza armonică a semnalului răspuns. Fiecare etapă se poate parcurge fie grafic fie analitic și corespunzător cu aceasta, metoda de analiză se numește: grafică, analitică sau grafo-analitică.

Întrucît etapa de analiză armonică a fost expusă în paragrafele precedente din acest capitol, în continuare ne vom rezuma numai la parcurgerea primei etape de analiză a circuitelor neliniare (obținerea semnalului răspuns).

Se precizează că deoarece semnalul răspuns este o mărime nesinusoidală nu poate fi aplicată metoda reprezentării în complex pentru analiza circuitelor neliniare neinerțiale.

Legea lui Ohm și teoremele lui Kirchhoff rămîn valabile și în acest caz, însă scrise numai pentru valorile instantanee ale mărimilor din circuitul considerat.

Aplicații

1. Determinarea grafică a curentului prin bobina cu miez feromagnetic alimentată de la o tensiune sinusoidală.

Dacă se neglijează rezistența proprie a înfășurării bobinei, tensiunea la borne se exprimă prin relația

$$u_L = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}, \qquad (25.77)$$

de unde rezultă că presupunînd fluxul sinusoidal de forma $\psi = \psi_m \sin \omega t$, tensiunea la borne este tot sinusoidală de forma $u_L = \omega\psi_m \cos \omega t$.

Pentru determinarea curentului prin bobină se pornește de la caracteristica neliniară cu histerezis a bobinei $\psi = f(i)$ reprezentată în figura 25.25. În aceeași figură

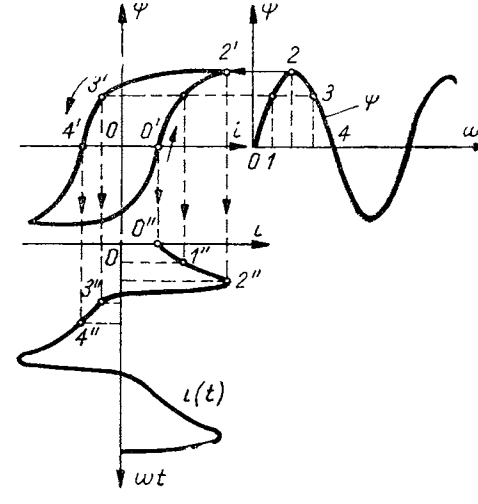


Fig. 25.25

este reprezentată și mărimea sinusoidală $\psi = \psi_m \sin \omega t$. Pentru diferite valori ale argumentului notate (0), (1), (2), (3) și (4) se obțin pe curba de histerezis punctele (0'), (1'), (2'), (3') și (4') și deci valorile curentului (0''), (1''), (2''), (3'') și (4''). Construcția grafică poate fi urmărită în figura 25.25.

Pentru semialternanța negativă a fluxului se obțin în continuare valori simetrice pentru curent. În final, curba $i = f(t)$ are forma nesinusoidală obținută în partea de jos a figurii 25.25.

Se remarcă următoarele aspecte: curentul $i(t)$ este nesinusoidal, avînd o formă de undă ascuțită; fluxul și curentul trec prin valori maxime în același timp; unda curentului este nesimetrică față de sfertul de perioadă, dar satisface egalitatea $i(\omega t + \pi) = -i(\omega t)$, deci va conține numai armonice impare în sinus și cosinus; curentul trece prin zero înaintea fluxului, unghiul θ numindu-se unghi de avans histeretic.

2. Determinarea analitică a curentului prin bobina cu miez de fier alimentată de la o tensiune sinusoidală.

Pentru rezolvarea acestei probleme, mai întîi se consideră aproximarea analitică a curbei de histerezis a bobinei prin relația (vezi 25.72):

$$i = a\psi + b\psi^3 + c\frac{d\psi}{dt}.$$

Cum s-a arătat mai sus, aplicînd la bornele bobinei o tensiune sinusoidală, rezultă și fluxul tot sinusoidal de forma $\psi = \psi_m \sin \omega t$. Atunci, expresia curentului prin bobină devine:

$$i = a\psi_m \sin \omega t + b\psi_m^3 \sin^3 \omega t + c\omega\psi_m \cos \omega t.$$

Ținînd cont de identitatea

$$\sin^3\omega t = \frac{3}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\sin 3\omega t,$$

se obține în final:

$$i = \left(a\psi_m + \frac{3}{4}b\psi_m^3\right)\sin \omega t + c\omega\psi_m \cos \omega t - \frac{1}{4}b\psi m^3 \sin 3\omega t. \qquad (25.78)$$

Expresia (25.78) evidențiază prezența armonicei de ordin trei în unda curentului din bobină.

CAPITOLUL 26

LINII ELECTRICE LUNGI

26.1. CIRCUITE CU PARAMETRI REPARTIZAȚI

În capitolele precedente s-au studiat circuite electrice filiforme, formate din elemente de circuit caracterizabile separat numai printr-o rezistență electrică, o inductivitate sau o capacitate. Astfel de circuite electrice, care admit scheme echivalente constituite din elemente ideale de circuit (R, L, C) (în număr finit) se numesc *circuite cu parametri concentrați*.

În numeroase aplicații tehnice, aproximarea parametrilor concentrați nu este însă valabilă. Liniile electrice lungi folosite pentru transportul energiei electrice la distanțe mari, înfășurările (bobinele) transformatoarelor electrice și alte circuite electrice nu au cîmpul electric, cîmpul magnetic și transformarea de energie electromagnetică (prin efect Joule-Lenz) concentrate în părți distincte ale circuitului, ci le au repartizate, practic, în tot lungul circuitului. Astfel de circuite se numesc *circuite cu parametri repartizați*.

Acumularea de sarcini în lungul circuitului, caracterizată prin capacitatea electrică, face ca în regimurile variabile în timp intensitatea curentului electric să varieze în lungul conductoarelor (neramificate ale) circuitelor cu parametri repartizați. La liniile electrice lungi imperfecțiunea izolației prin care trece un curent electric între conductoarele liniei contribuie la variația intensității curentului electric în lungul acestora.

26.2. PARAMETRI LINEICI

Liniile electrice lungi — care sînt constituite dintr-un sistem de conductoare filiforme, paralele, cu lungimea foarte mare față de distanța dintre ele — se utilizează pentru transmiterea la distanțe mari a energiei electromagnetice (în electroenergetică) sau a semnalelor electromagnetice (în telecomunicațiile pe fire).

Considerăm linia bifilară din figura 26.1, de lungime l și notăm cu $1—1'$ bornele de intrare (dinspre generator) și cu $2—2'$ bornele de ieșire (dinspre receptor). S-a considerat un element de linie, de lungime dx,

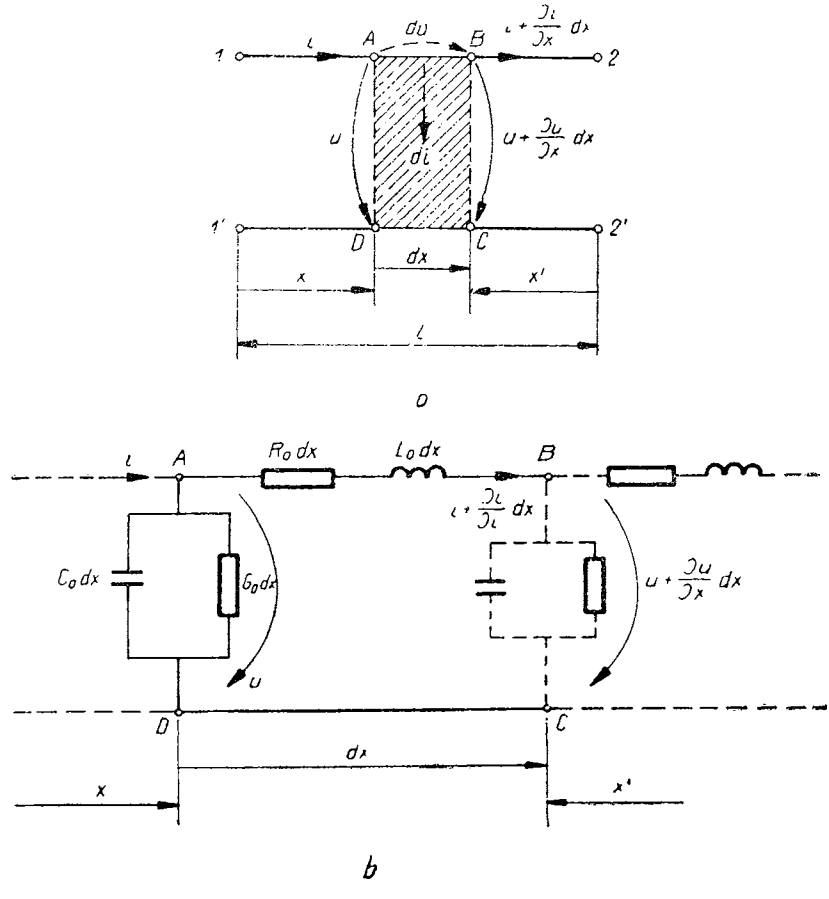


Fig. 26.1.

situat la distanța x de începutul liniei (respectiv distanța x' de sfîrșit). Pentru linia bifilară se definesc următorii *parametri lineici:*

a) Rezistența lineică (rezistența totală a celor două conductoare pe unitatea de lungime):

$$R_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2 \frac{\Delta u_f}{i \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta R}{\Delta x} \right) \left[\frac{\Omega}{\text{m}} \right], \tag{26.1}$$

unde:

u_f este căderea de tensiune din lungul uneia dintre porțiunile de conductor, pe lungimea Δx;

i — curentul din conductor din dreptul acelei porțiuni;

ΔR — rezistența ambelor conductoare pe porțiunea Δx.

Din relația (6.1) rezultă

$$\mathrm{d}u_f = \frac{R_0}{2} \cdot i \cdot \mathrm{d}x. \tag{26.2}$$

b) Inductivitatea lineică (inductivitatea sistemului de două conductoare pe unitatea de lungime a liniei):

$$L_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta \Phi}{i \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} \left[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \right], \tag{26.6}$$

unde $\Delta \Phi$ este fluxul magnetic prin suprafața sprijinită de cele două conductoare de lungime Δx (suprafață haşurată în fig. 26.1), iar ΔL este inductivitatea proprie corespunzătoare acestei porțiuni a liniei.

Din relația (26.3) rezultă:

$$\mathrm{d}\Phi = L_0 \cdot i \cdot \mathrm{d}x. \tag{26.4}$$

c) Capacitatea lineică (capacitatea sistemului de două conductoare pe unitatea de lungime a liniei):

$$C_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta q}{u \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} \left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \right]. \tag{26.5}$$

unde:

Δq este sarcina electrică localizată pe suprafața unuia dintre conductoare pe porțiunea Δx;

u — tensiunea dintre acest conductor și celălalt în dreptul acestei porțiuni;

ΔC — capacitatea între cele două conductoare pe porțiunea Δx.

Din relația (26.5) rezultă:

$$\mathrm{d}q = C_0 u \mathrm{d}x. \tag{26.6}$$

d) Conductanța lineică de izolație (sau perditanța) (conductanța izolației dintre conductoarele liniei pe unitatea de lungime):

$$G_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta i_g}{u \Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \left[\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}} \right] = \left[\frac{\Omega^{-1}}{\mathrm{m}} \right], \tag{26.7}$$

unde:

Δi_g este curentul de conducție, care se închide prin izolantul imperfect dintre cele două porțiuni de conductoare pe lungimea Δx;

ΔG — conductanța corespunzătoare acestei porțiuni din izolația liniei.

Din relația (26.7) rezultă:

$$\mathrm{d}i_g = G_0 u \mathrm{d}x. \tag{26.8}$$

Dacă parametrii lineici R_0, L_0, C_0, G_0 nu depind de distanța x, linia se numește *omogenă*.

26.3. ECUAȚIILE LINIILOR ELECTRICE LUNGI

În figura 26.1 sînt notate cu u și i tensiunea și curentul din linie la un moment dat la distanța x de la începutul liniei. În același moment, la distanța $x + \mathrm{d}x$, tensiunea și curentul din linie vor fi $u + \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x$, respectiv $i + \frac{\partial i}{\partial x} \mathrm{d}x$.

Modificarea tensiunii pe porțiunea dx se datorește atît rezistenței $R_0 dx$ cît și inductivității $L_0 dx$, iar modificarea curentului se datorește conductanței $G_0 dx$ și capacității $C_0 dx$ dintre firele conductoare.

Teorema întîi a lui Kirchhoff aplicată nodului A din figura 26.1 conduce la ecuația:

$$i = i + \frac{\partial i}{\partial x} dx + G_0 dx \cdot u + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{26.9}$$

unde:

$G_0 dx u$ reprezintă curentul de conducție ce se scurge între conductoare pe porțiunea dx;

$C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}$ — curentul de deplasare care se scurge între conductoare datorită prezenței capacității între fire și a faptului că există variația în timp a tensiunii u (deci a intensității cîmpului electric).

După simplificări, ecuația (26.9) se reduce la forma:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{26.10}$$

Teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată ochiului $ABCDA$ din figura 26.1 conduce la ecuația:

$$u = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}, \tag{26.11}$$

unde:

$R_0 dx i$ este căderea de tensiune pe rezistanța porțiunii dx;

$L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}$ — căderea de tensiune datorită inductivității proprii a liniei (datorită fluxului magnetic variabil în timp care străbate suprafața haşurată în figura 26.1).

După simplificări, ecuația (26.11) devine:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \tag{26.12}$$

Ecuațiile cu derivate parțiale (26.10) și (26.12) reprezintă *ecuațiile liniilor lungi* denumite și *ecuațiile telegrafiștilor* (ecuații de ordinul întîi).

Semnul minus care apare în cele două ecuații trebuie interpretat prin faptul că atît curentul i cît și tensiunea u *scad* în direcția creșterii variabilei x (de la generator către receptor).

Dacă în loc de variabila x se introduce variabila x' (măsurată de la receptor către generator), legate prin relația: $x + x' = l = \text{const.}$, adică $dx = -dx'$, ecuațiile liniilor lungi se vor scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x'} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x'} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{26.13}$$

Determinarea tensiunii și a curentului ca funcții de t și x pe baza rezolvării ecuațiilor telegrafiștilor (26.10 și 26.12 sau sistemul 26.13), care sînt ecuații cu derivate parțiale simultane, în condiții inițiale și de frontieră date (adică în regim tranzitoriu) în cazul general al liniilor omogene este o problemă complicată, care se face cu metode operaționale (de exemplu cu ajutorul transformării Laplace).

În cele ce urmează vom studia liniile lungi numai în regim permanent sinusoidal.

26.4. LINII LUNGI OMOGENE BIFILARE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

În regim permanent sinusoidal, tensiunea și curentul sînt în fiecare punct al liniei lungi, funcții sinusoidale de timp de aceeași frecvență, de forma:

$$u = u(x, t) = \sqrt{2}U(x) \cdot \sin[\omega t + \psi(x)] \tag{26.14}$$

$$i = i(x, t) = \sqrt{2}\, I(x) \cdot \sin\,[\omega t + \psi(x) - \varphi(x)], \tag{26.15}$$

în care valorile efective $U(x)$ și $I(x)$ precum și fazele inițiale $\psi(x)$ și $[\psi(x) - \varphi(x)]$ sînt dependente de punctul considerat x al liniei. Aceste mărimi se pot reprezenta în complex simplificat, imaginile lor fiind funcții de variabila spațială x:

$$u(x, t) \rightleftarrows \underline{U}(x) = U(x) \cdot e^{j\psi(x)} \tag{26.16}$$

$$i(x, t) \rightleftarrows \underline{I}(x) \cdot = I(x) \cdot e^{j[\psi(x)-\varphi(x)]}. \tag{26.17}$$

Derivatele parțiale ale acestor mărimi se reprezintă astfel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightleftarrows \frac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}x} \tag{26.18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightleftarrows \mathrm{j}\omega\underline{U} \tag{26.19}$$

și analog pentru curent:

$$\frac{\partial i}{\partial x} \rightleftarrows \frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}x}; \quad \frac{\partial i}{\partial t} \rightleftarrows \mathrm{j}\omega\underline{I}. \tag{26.20}$$

Folosind aceste reprezentări în complex, ecuațiile telegrafiștilor (26.10) și (26.12) se reprezintă în complex prin următorul sistem de ecuații diferențiale ordinare în variabila x:

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}x} &= (R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)\underline{I} \\ -\frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}x} &= (G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)\underline{U}, \end{aligned} \tag{26.21}$$

care reprezintă *forma complexă a ecuațiilor de ordinul întîi ale telegrafiștilor*. Prin derivare se poate elimina succesiv oricare dintre funcțiile necunoscute $\underline{I}$ sau $\underline{U}$ și se obțin următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\underline{U}}{\mathrm{d}x} &= (R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)\underline{U} \\ \frac{\mathrm{d}^2\underline{I}}{\mathrm{d}x^2} &= (R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega G_0)\underline{I}, \end{aligned} \tag{26.22}$$

care reprezintă *forma complexă a ecuațiilor de ordinul al doilea ale telegrafiștilor*.

Dacă se notează:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)} = \alpha + \mathrm{j}\beta \quad (\alpha > 0) \tag{26.23}$$

γ numindu-se *constanta de propagare a liniei*, α — *constanta de atenuare*, iar β — *constanta de fază a liniei* (vezi paragraful 26.5), ecuațiile (26.22) se pot scrie simplificat:

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{U}}{\mathrm{d}x^2} = \underline{\gamma}^2\underline{U}; \quad \frac{\mathrm{d}^2\underline{I}}{\mathrm{d}x^2} = \underline{\gamma}^2\underline{I}. \tag{26.24}$$

La rezolvarea acestor ecuații trebuie să se țină seama că $\underline{U}$ și $\underline{I}$ sînt legate prin ecuațiile de ordinul întîi (26.12), de aceea se rezolvă numai una dintre ecuații, de exemplu aceea a tensiunii, curentul deducîndu-se apoi din (26.21).

Ecuația caracteristică din (26.24) fiind:

$$p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0, \tag{26.25}$$

cu soluțiile:

$$p_{1,2} = \pm\underline{\gamma} = \pm(\alpha + \mathrm{j}\beta), \tag{26.26}$$

rezultă soluția generală a tensiunii

$$\underline{U}(x) = \underline{A} \cdot \mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} + \underline{B} \cdot \mathrm{e}^{\underline{\gamma}x}, \tag{26.27}$$

în care $\underline{A}$ și $\underline{B}$ sînt constante arbitrare, în general complexe.

Curentul se obține înlocuind expresia lui $\underline{U}(x)$ din (26.27) în prima ecuație din (26.21):

$$\underline{I}(x) = -\frac{1}{R_0 + j\omega L_0} \cdot \frac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}x} = \frac{\underline{\gamma}}{R_0 + j\omega L_0}[\underline{A} \cdot \mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} - \underline{B} \cdot \mathrm{e}^{\underline{\gamma}x}]. \tag{26.28}$$

Dacă se notează:

$$\underline{Z}_c = \frac{R_0 + j\omega L_0}{\underline{\gamma}} = \frac{\underline{\gamma}}{G_0 + j\omega C_0} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + \mathrm{j}\omega C_0}}, \tag{26.29}$$

$\underline{Z}_c$ numindu-se *impedanța caracteristică complexă a liniei*, soluțiile generale (26.27) și (26.28) ale formei complexe a ecuațiilor telegrafiștilor se pot pune sub forma:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{A} \cdot \mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} + \underline{B} \cdot \mathrm{e}^{\underline{\gamma}x} \\ \underline{I}(x) &= \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_c} \cdot \mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_c} \cdot \mathrm{e}^{\underline{\gamma}x}, \end{aligned} \tag{26.30}$$

în care constantele arbitrare complexe $\underline{A}$ și $\underline{B}$ sînt determinabile prin condițiile de la capetele liniei.

Astfel, în cazul cînd se dau tensiunea și curentul la bornele de intrare a liniei ($x = 0$), din relațiile (26.30) se obțin:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}(0) = \underline{A} + \underline{B} \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}(0) = \frac{\underline{A} - \underline{B}}{\underline{Z}_c}. \end{aligned} \tag{26.31}$$

Din sistemul (26.31) rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_c\underline{I}_1) \\ \underline{B} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_c\underline{I}_1). \end{aligned} \tag{26.32}$$

Înlocuind valorile lui $\underline{A}$ și $\underline{B}$ din (26.32) și (26.30), se obține:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{Z}_c\underline{I}_1 \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}, \end{aligned} \tag{26.33}$$

Acestea se pot scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_1 \cdot \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_c \cdot \underline{I}_1 \cdot \operatorname{sh} \gamma x \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_1 \cdot \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \cdot \operatorname{sh} \gamma x, \end{aligned} \tag{26.34}$$

care reprezintă *forma complexă a ecuațiilor liniilor lungi bifilare, liniare și omogene, în regim sinusoidal în funcție de mărimile de intrare.*

Dacă se dau tensiunea și curentul de la bornele de ieșire ale liniei ($x = l$), rezultă din (26.30):

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{U}(l) = \underline{A} \cdot e^{-\gamma l} + \underline{B} \cdot e^{\gamma l} \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}(l) = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma l} - \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma l}, \end{aligned} \tag{26.35}$$

de unde rezultă relațiile:

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot e^{-\gamma l} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_c\underline{I}_2) \\ \underline{B} \cdot e^{\gamma l} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_c\underline{I}_2). \end{aligned} \tag{26.36}$$

sau

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_c\underline{I}_2)\, e^{\gamma l} \\ \underline{B} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_c\underline{I}_2)\, e^{-\gamma l}. \end{aligned} \tag{26.37}$$

Înlocuind expresiile constantelor $\underline{A}$ și $\underline{B}$ din (26.37) în soluțiile generale (26.30), rezultă:

$$\begin{aligned}\underline{U}(x) &= \underline{U}_2 \cdot \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \cdot \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2} \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_2 \cdot \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2}.\end{aligned} \tag{26.38}$$

Aceste soluții se pot exprima în funcție de distanța $x' = l - x$, măsurată de la sfîrșitul liniei, și cu ajutorul funcțiilor hiperbolice se pot scrie sub forma:

$$\begin{aligned}\underline{U}(x') &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x' \\ \underline{I}(x') &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \gamma x',\end{aligned} \tag{26.39}$$

care reprezintă *forma complexă a ecuațiilor liniilor lungi bifilare, liniare și omogene, în regim sinusoidal, în funcție de mărimile de ieșire.*

26.5. UNDELE DE TENSIUNE ȘI DE CURENT ÎN CAZUL LINIILOR LUNGI ÎN REGIM SINUSOIDAL

Din relațiile (26.30) rezultă că repartiția spațială a tensiunii și a intensității curentului, la un moment dat t, se obține prin adunarea a cîte două componente:

$$\begin{aligned}\underline{U}(x) &= \underline{U}_d(x) + \underline{U}_i(x) \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_d(x) + \underline{I}_i(x),\end{aligned} \tag{26.40}$$

respectiv, în valori instantanee:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= u_d(x, t) + u_i(x, t) \\ i(x, t) &= i_d(x, t) + i_i(x, t)\end{aligned} \tag{26.41}$$

numite: *undă directă de tensiune* (u_d), *undă directă de curent* (i_d) *undă inversă de tensiune* (u_i) *și undă inversă de curent* (i_i).

Astfel, valoarea complexă a *undei directe* de tensiune este (a se compara 26.30 cu 26.40):

$$\underline{U}_d(x) = A \cdot e^{-\gamma x} \tag{26.42}$$

cu coeficientul

$$\underline{A} = \underline{U}_d(0) = \underline{U}_{do} = U_{do} \cdot e^{j\psi_{do}}. \tag{26.43}$$

Așadar, rezultă:

$$\underline{U}_d(x) = \underline{U}_{d0} \cdot e^{-\gamma x} = U_{do} \cdot e^{j\psi_{do}} \cdot e^{-(\alpha + j\beta)x} \tag{26.44}$$

sau

$$\underline{U}_d(x) = \underline{U}_{d0} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j(\beta x - \psi_{do})}. \tag{26.45}$$

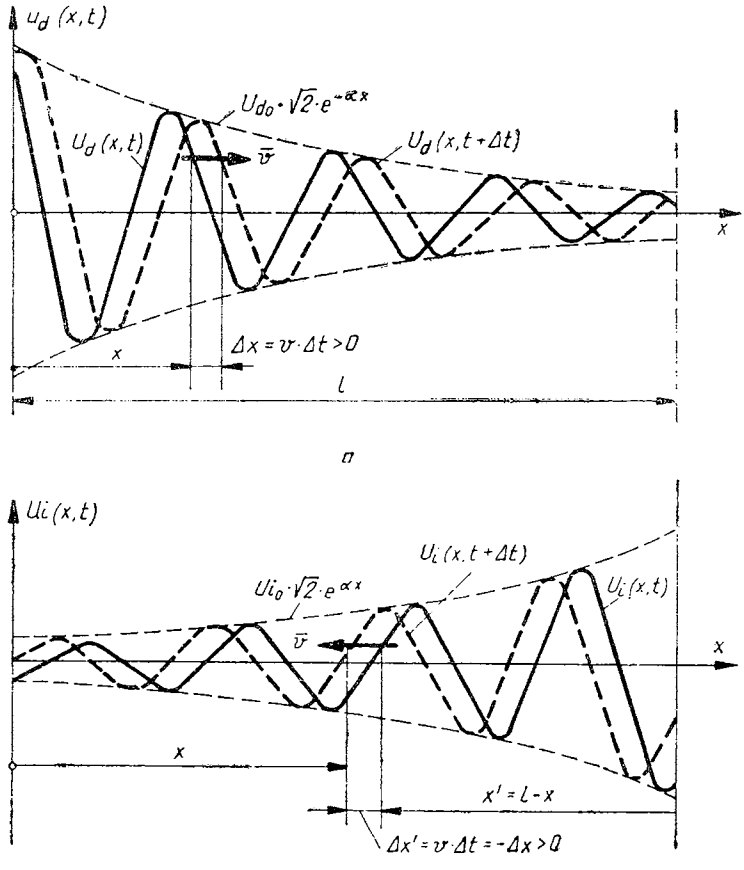


Fig. 26.2

Valoarea instantanee corespunzătoare este:

$$u_d(x,\ t) = \mathfrak{Im}\{\underline{U}_d \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \cdot U_{d_0} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \psi d_0). \tag{26.46}$$

Această undă directă este o undă mobilă amortizată, în sensul că repartiția ei spațială de-a lungul liniei se deplasează pe linie cu o viteză v de la începutul spre sfîrșitul liniei și se amortizează după exponențiala $e^{-\alpha x}$. În figura 26.2, *a* se reprezintă o astfel de undă atenuată, la momentele t și $t + \Delta t$.

În mod asemănător se poate scrie *unda inversă* (sau *reflectată*) de tensiune (vezi relația 26.30):

$$\underline{U}_i(x) = \underline{B} \cdot e^{\gamma x} = \underline{U}_{i_0} \cdot e^{\gamma x} = \underline{U}_{i0} \cdot e^{\gamma(l-x')} = \underline{U}_{i0} \cdot e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma x'} = \underline{B}' \cdot e^{-\gamma x'}, \tag{26.47}$$

care are aceeaşi formă ca şi unda directă (vezi relaţia 26.42), dacă se exprimă în funcţie de variabila $x' = l - x$. Această componentă corespunde, prin urmare, unei unde atenuate inverse (vezi fig. 26.2, *b*) care se propagă cu aceeaşi viteză v în sensul x — lor negativi, atenuîndu-se în sensul ei de propagare cu aceeaşi atenuare α pe unitate de lungime.

În analogie cu tensiunea, din relaţia a doua (26.30) mai rezultă că şi curentul se obţine prin suprapunerea a două componente: *curentul direct*

$$\underline{I}_d(x) = \frac{\underline{U}_d(x)}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{U}_{d0}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma x} \tag{26.48}$$

şi *curentul invers* (sau *reflectat*)

$$\underline{I}_i(x) = -\frac{\underline{U}_i(x)}{\underline{Z}_c} = -\frac{\underline{U}_{i0}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma x}. \tag{26.49}$$

Relaţia (26.46) justifică denumirea de *constantă de atenuare* dată părţii reale α a constantei de propagare şi de *constantă de fază* dată părţii imaginare β din constanta de propagare.

Se defineşte *lungimea de undă* λ ca fiind creşterea distanţei x corespunzătoare unei creşteri cu 2π a argumentului undei respective (sau cea mai mică distanţă dintre cele două puncte în care undele respective sînt în fază):

$$\omega t - \beta x + \psi d_0 - [\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi d_0] = 2\pi \tag{26.50}$$

şi deci

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \tag{26.51}$$

Viteza de fază a unei unde faţă de sensul pozitiv al axei x este prin definiţie viteza unui punct fictiv mobil în care faza undei este constantă.

Astfel, pentru undele directe, din condiţia

$$\omega t - \beta x + \psi d_0 = \text{const.}, \tag{26.52}$$

rezultă viteza de fază:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda f. \tag{26.53}$$

Coeficientul de reflexie al undelor la sfîrşitul liniei ($x = l$) este prin definiţie raportul dintre complexul tensiunii undei inverse (sau reflectate) şi complexul tensiunii undei directe la sfîrşitul liniei (vezi rel. 26.35):

$$\underline{K} = \frac{\underline{U}_{2i}}{\underline{U}_{2d}} = \frac{\underline{B} \cdot e^{\gamma l}}{\underline{A} \cdot e^{-\gamma l}} = \frac{\frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2)}{\frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2)} = \frac{\underline{I}_2\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} - \underline{Z}_c\right)}{\underline{I}_2\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} + \underline{Z}_c\right)} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c}, \tag{26.54}$$

unde:

$\underline{Z}_2 = \underline{U}_2/\underline{I}_2$ este impedanţa complexă a receptorului conectat la sfîrşitul liniei;

$\underline{Z}_c$ — impedanţa caracteristică complexă a liniei.

Observație

Dacă receptorul conectat la sfîrșitul liniei are o impedanță complexă $\underline{Z}_2$ egală cu impedanța caracteristică complexă a liniei, adică:

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c, \tag{26.55}$$

coeficientul de reflexie este nul ($K = 0$) și ca urmare nu există unde reflectate, deoarece $\underline{U}_{2i} = \underline{K} \cdot \underline{U}_{2d}$, adică:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_d(x); \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_d(x). \tag{26.56}$$

Liniile la care este conectat un receptor cu impedanța egală cu impedanța caracteristică complexă a liniei se numesc *linii adaptate*.

26.6. LINIA FĂRĂ DISTORSIUNI. LINIA FĂRĂ PIERDERI

Dependeța de frecvență a constantei de propagare ($\underline{\gamma}$), a constantei de fază (β) și deci a vitezei de fază ($v = \omega/\beta$) face ca defazajele dintre componentele (armonicele) de frecvențe diferite ale unui semnal (de exemplu, un curent purtător de informații) transmis printr-o linie lungă să nu fie aceleași la începutul și la sfîrșitul liniei. Pentru eliminarea acestei distorsiuni a semnalelor cauzată de viteza de fază diferită a armonicelor componente de frecvențe diferite, se folosesc *liniile fără distorsiune* ai căror parametri satisfac condiția lui Heaviside:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}. \tag{26.57}$$

În acest caz, constanta de propagare a liniei fără distorsiuni are expresia:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega\sqrt{L_0 C_0}. \tag{26.58}$$

Așadar:

$$\alpha = \mathcal{R}e[\underline{\gamma}] = \sqrt{R_0 G_0} \tag{26.59}$$

$$\beta = \mathcal{I}m[\underline{\gamma}] = \omega\sqrt{L_0 C_0}. \tag{26.60}$$

Ca urmare, conform relației (26.53), rezultă o viteză de fază:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \tag{26.61}$$

independentă de frecvență.

Pentru o linie bifilară aeriană cu conductoare paralele de diametru $2a$ foarte mic față de distanța d dintre axele conductoarelor și față de lungimea l a acestora, inductivitatea și capacitatea lineică au valorile:

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \tag{26.62}$$

$$C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{d}{a}} \tag{26.63}$$

şi deci viteza de fază a undei este

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \tag{26.64}$$

egală cu viteza de propagare a luminii în vid.

Impedanţa caracteristică complexă a unei linii fără distorsiuni este:

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \tag{26.65}$$

Pentru realizarea condiţiei lui Heaviside (26.57) se măreşte inductivitatea cablurilor telefonice, intercalînd în serie cu acestea bobine de mare inductivitate (procedeul Pupin).

Liniile fără pierderi sînt linii idealizate cu

$$R_0 = 0\,;\; G_0 = 0. \tag{26.66}$$

Ele satisfac condiţia lui Heaviside (26.57) şi sînt linii fără distorsiuni cu o constantă de atenuare (vezi relaţia 26.59) nulă:

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0} = 0. \tag{26.67}$$

Liniile fără pierderi au impedanţa caracteristica (vezi relaţia 26.65):

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tag{26.68}$$

şi o repartiţie spaţială periodică sinusoidală (neamortizată) a tensiunii şi curentului, de-a-lungul liniei (vezi relaţia 26.46).

CAPITOLUL 27

CÎMPUL ELECTROMAGNETIC VARIABIL ÎN MEDIU DIELECTRIC ŞI CONDUCTOR

Studiul general şi sistematic al cîmpului electromagnetic se poate face cu ajutorul formelor locale ale legilor, care exprimă în modul cel mai adecvat (conform concepţiei de localizare a tuturor acţiunilor şi proprietăţilor fizice) structura acestui sistem fizic.

27.1. ECUAŢIILE LUI MAXWELL

Formele locale ale legilor electromagnetismului utilizate în studiul cîmpului electromagnetic variabil în medii sînt:

■ — *legea circuitului magnetic în medii imobile:*

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = \int_{S_\Gamma} \overline{J} \cdot \overline{\mathrm{d}A} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S_\Gamma} \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \int_{S_\Gamma} \left(\overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \right) \cdot \overline{\mathrm{d}A},$$

de unde: $\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$;

■ — *legea inducţiei electromagnetice în medii imobile:*

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S_\Gamma} \overline{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A},$$

de unde: $\operatorname{rot} \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$;

■ — *legea fluxului electric:*

$$\oint_{\Sigma} \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \int_{V_\Sigma} \rho_v \cdot \mathrm{d}v,$$

de unde: $\operatorname{div} \overline{D} = \rho_v$;

■ — *legea fluxului magnetic:*

$$\oint_{\Sigma} \overline{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = 0,$$

de unde: $\operatorname{div} \overline{B} = 0$.

Se numesc *ecuațiile lui Maxwell* ecuațiile cu derivate parțiale care reprezintă *formele locale ale legilor generale ale cîmpului electromagnetic în medii imobile* (viteza locală $v = 0$) *și în domenii de continuitate* (și netezime) a proprietăților fizice locale. Aceste relații se completează cu relațiile dintre $\bar{D}$ și $\bar{E}$, dintre $\bar{B}$ și $\bar{H}$ și eventual dintre $\bar{E}$ și $\bar{J}$. În scrierea vectorială aceste ecuații sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ &\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ &\operatorname{div} \bar{D} = \rho_v \\ &\operatorname{div} \bar{B} = 0 \\ &\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \\ &\bar{B} = \mu \bar{H} \\ &\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_i). \end{aligned}\right\} \tag{27.1}$$

Sistemul de ecuații ale lui Maxwell reprezintă, din punctul de vedere matematic, un sistem de ecuații scalare cu derivate parțiale cu șase funcții necunoscute, de exemplu componentele vectorilor cîmp $\bar{E}(r, t)$ și $\bar{H}(r, t)$. În coordonate carteziene ecuațiile sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ &\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ &\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ &\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ &\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{27.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \rho_v \\ &\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\}$$

În teoria sistemelor de ecuații cu derivate parțiale se arată că soluțiile $\bar{H}$ și $\bar{E}$ ale unei asemenea sistem sînt univoc determinate dacă se dau ε și μ; sursele ρ_v și J_x, J_y, J_z; condițiile de frontieră pe fronteiera

domeniului în care se determină cîmpul (componenta tangențială a lui $\bar{H}$ sau a lui $\bar{E}$) și condițiile inițiale.

Funcțiile $\rho_v(\bar{r}, t)$ și $\bar{J}(\bar{r}, t)$ nu sînt complet independente, fiind legate prin forma locală a legii conservării sarcinii libere:

$$\operatorname{div} \bar{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0.$$

27.2. UNDA ELECTROMAGNETICĂ PLANĂ

Din analiza sistemului de ecuații ale lui Maxwell rezultă că în cîmpuri variabile în timp apare o dublă legătură cauzală între cîmpul electric și cîmpul magnetic care condiționează existența cîmpului electromagnetic „desprins" de corpuri, sub formă de unde electromagnetice.

Se exemplifică această analiză într-un caz particular, și anume în cazul cîmpului electromagnetic ale cărui mărimi de stare locală au (la un moment dat) aceeași valoare în toate punctele unui plan perpendicular pe o direcție privilegiată (oricare ar fi un astfel de plan). Dacă se alege direcția privileagiată drept axă Ox, rezultă că în acest tip de cîmp (numit *cîmp plan* sau *undă plană*), mărimile de stare depind numai de x și de t:

$$\bar{E} = \bar{E}(x, t); \qquad \bar{H} = \bar{H}(x, t). \tag{27.3}$$

O astfel de undă electromagnetică plană există (practic) la distanță suficient de mare de orice sursă de unde electromagnetice (de exemplu, de orice antentă de emisiune) într-un mediu izotrop și omogen. Presupunînd un astfel de mediu imobil, liniar, cu permitivitatea ε și permeabilitatea μ, se caută soluții variabile în timp (nu cele statice) ale ecuațiilor lui Maxwell (27.2) în ipoteza (27.3), considerînd că în mediul respectiv nu există nici sarcini ($\rho_v = 0$), nici curenți ($\bar{J} = 0$), pentru a pune astfel în evidență cîmpul electromagnetic produs (local) exclusiv prin interacțiunea cîmpul electric variabil în timp și cîmpul magnetic variabil în timp și nu prin alte căi.

Direcția axei Ox se numește direcție de propagare. În aceste condiții $\left(\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0, \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0, \rho_v \equiv 0, \bar{J} = 0\right)$ ecuațiile (27.2) devin:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 0. \\ -\dfrac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ -\dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \dfrac{\partial H_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \dfrac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases} \ldots \begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{27.4}$$

Din aceste relații rezultă două consecințe importante:

a) Unda electromagnetică plană este o undă transversală, adică nu are componente în direcția de propagare ($E_x = 0$, $H_x = 0$), vectorii $\bar{E}$ și $\bar{H}$ fiind conținuți în plane transversale față de direcția de propagare.

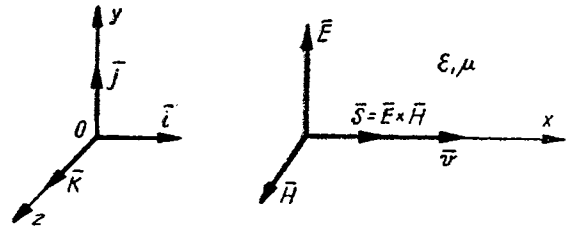


Fig. 27.1.

b) Sistemele de ecuaţii (27.4) rămase pot fi grupate în două perechi de ecuaţii: una se referă numai la mărimile (E_y, H_z), iar alta numai la mărimile (E_z, H_y). Aceste perechi de mărimi nu sînt legate nici printr-un fel de relaţii deci sînt independente între ele.

Vom restrînge studiul numai la una dintre aceste unde, de exemplu, la cea descrisă de perechea de mărimi E_y şi H_z, adică se presupune că $E_z = 0$ şi $H_y = 0$.

Vectorii $\bar{E} = \bar{j}E_y$ şi $\bar{H} = \bar{k}H_z$ sînt perpendiculari între ei şi ambii sînt perpendiculari pe direcţia de propagare (fig. 27.1).

Din sistemul (27.4) mai rămîn două ecuaţii cu derivate parţiale, simultan, de ordinul I:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \end{aligned} \tag{27.5}$$

Se derivă prima ecuaţie în raport cu x şi se scade din a doua ecuaţie derivată în raport cu t şi înmulţită cu ε. Se obţine pentru H_z ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea, numită ecuaţia undelor:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0. \tag{27.6}$$

Dacă din sistemul (27.5) se elimină H_z, se obţine pentru E_y aceeaşi ecuaţie cu derivate parţiale:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \tag{27.7}$$

Deşi cele două cîmpuri satisfac aceeaşi ecuaţie nu căutăm soluţii independente pentru fiecare ecuaţie deoarece E_y şi H_z sînt legate prin ecuaţiile (27.5).

În teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale se arată că o soluţie generală a ecuaţiei undelor (27.7) este o funcţie f arbitrară care depinde de x şi t numai prin intermediul unei combinaţii liniare şi omogene a acestor variabile, adică prin intermediul variabilei $t' = t - \frac{x}{v}$, avînd deci forma:

$$E_y = f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f(t'). \tag{27.8}$$

Notînd $f' = \frac{df}{dt'}$ şi $f'' = \frac{d^2f}{dt'^2}$, se obţine:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{df}{dt'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{1}{v} f'; \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{df}{dt'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = f'$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{df'}{dt'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{f''}{v^2}; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{df'}{dt'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = f'',$$

adică:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = f'' \cdot \left[\frac{1}{v^2} - \varepsilon\mu\right].$$

Pentru ca membrul al doilea să se anuleze, este suficient ca:

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} \text{ sau } v = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{27.9}$$

Semnificaţia fizică a constantei v rezultă imediat dacă se observă că scăzînd şi adunînd Δt la argumentul $\left(t - \frac{x}{v}\right)$ se obţine identitatea:

$$f\left(t - \frac{x}{v}\right) \equiv f\left[(t - \Delta t) - \frac{x - v \cdot \Delta t}{v}\right]. \tag{27.10}$$

Din (27.10) rezultă că soluţia f a ecuaţiei undelor depinde de timp şi de punct, astfel încît valoarea ei în punctul x este, în fiecare moment t, egală cu valoarea pe care a avut-o în trecut funcţia, şi anume în momentul $t - \Delta t$ într-un punct situat mai înapoi cu distanţa $v \cdot \Delta t$. Cu alte cuvinte, forma (repartiţia spaţială) a funcţiei se deplasează în lungul axei x cu viteza $v = \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta t}$ numită *viteza de fază* a undei.

Relaţia (27.9) arată că viteza de fază are două valori posibile egale şi de sens contrar. Prima corespunde unei unde care se propagă în sensul pozitiv ales pentru axa x. Aceasta este numită convenţional *undă directă* şi are deci expresia: $f(t - \sqrt{\varepsilon\mu} \cdot x)$ cu $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. A doua corespunde unei unde care se propagă în sensul negativ al axei x şi care este numită convenţional *undă inversă*, avînd expresia $f(t + \sqrt{\varepsilon\mu} \cdot x)$ cu $v = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Fiecare dintre aceste unde există numai dacă au existat în prealabil undeva la stînga zonei din spaţiu considerat (pentru unda directă), respectiv la dreapta zonei din spaţiu considerat (pentru unda inversă) condiţiile fizice necesare producerii lor (de exemplu, o antentă de emisiune, o suprafaţă reflectantă etc.).

Deoarece în (27.8) f este o funcţie arbitrară, în cazul unei variaţii sinusoidale în timp a cîmpului într-un punct dat, avem:

$$E_y = E_{y\,max} \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Din (27.5) avem:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{1}{\mu \cdot v} f'$$

şi prin integrare:

$$H_z = \frac{1}{\mu v}\int f' \mathrm{d}t = \frac{1}{\mu \cdot v} f + \text{const.}$$

Constanta de integrare se neglijează, deoarece se caută numai soluţiile variabile în timp. Se notează:

$$Z = \mu \cdot v = \frac{1}{\varepsilon \cdot v} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cdot Z_0 = \frac{E_y}{H_z}, \tag{27.11}$$

o mărime de material caracteristică mediului, numită impedanţă de undă, a cărei valoare în vid este:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \cong 377\ \Omega. \tag{27.12}$$

Cu această notaţie putem scrie:

$$H_z = \frac{1}{Z} f\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{E_y}{Z}, \tag{27.13}$$

adică H_z şi E_y în fiecare punct din spaţiu sînt proporţionale şi în fază

27.3. TEOREMA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE

Concepţia despre cîmpul electromagnetic, considerat ca o formă de materie capabilă să acumuleze şi să transmită energie, permite să se interpreteze energetic o anumită consecinţă a ecuaţiilor lui Maxwell, numită teorema energiei electromagnetice. Se consideră, în acest scop, o porţiune V_Σ mărginită de o suprafaţă închisă Σ din cîmpul electromagnetic (fig. 27.2), în interiorul căreia se găsesc corpuri imobile ($v = 0$) cu proprietăţi de material liniare (fără histerzis, cu ε şi μ independente de E respectiv H). În conformitate cu concepţia menţionată, în domeniul V_Σ este localizată o anumită energie electromagnetică W cu densitatea de volum:

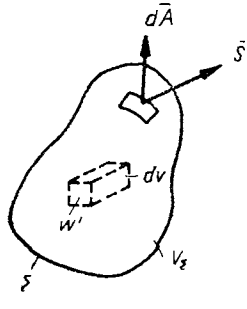


Fig. 27.2.

$$W' = \frac{\bar{E}\cdot\bar{D}}{2} + \frac{\bar{H}\cdot\bar{B}}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon} + \frac{B^2}{2\mu},$$

adică:

$$W = \int_{V_\Sigma} W' \cdot \mathrm{d}v = \int_{V_\Sigma} \frac{1}{2}(\bar{E}\cdot\bar{D} + \bar{H}\cdot\bar{B})\,\mathrm{d}v. \tag{27.14}$$

Conform principiului de conservare a energiei, la orice variație în timp a stării sistemului fizic pe care îl constituie cîmpul electromagnetic din interiorul suprafeței închise Σ, viteza de scădere a acestei energii trebuie să fie egală cu suma puterilor cedate de acest sistem fizic altor sisteme fizice. Cîmpul este însă în contact numai cu corpurile din interiorul suprafeței (care fiind presupuse imobile și fără histerezis primesc putere numai sub forma precizată de legea transformării de energie în conductori — căldură — adică nu și sub formă de lucru mecanic), și cu cîmpul electromagnetic din exteriorul suprafeței.

Se poate deci scrie:

$$-\frac{dW}{dt} = P_J + P_\Sigma. \tag{27.15}$$

Acesta este principiul de conservare a energiei aplicat cazului studiat. Mărimea W are expresia (27.14) și $P_J = \int_{V_\Sigma} \bar{E} \cdot \bar{J}\, dv$ este puterea trasmisă de cîmp corpurilor din V_Σ în procesul de conducție a curentului electric în conformitate cu legea Joule — Lenz, iar P_Σ este fluxul de energie electromagnetică, adică puterea transmisă în cîmp prin suprafața închisă Σ, a cărui expresie este deocamdată necunoscută și urmează a fi determinată. Ținînd seama de acestea (27.15) devine:

$$-\frac{d}{dt}\int_{V_\Sigma} \frac{1}{2}(\bar{E}\,\bar{D} + \bar{H}\,\bar{B})\, dv = \int_{V_\Sigma} \bar{E} \cdot \bar{J}\, dv + P_\Sigma. \tag{27.16}$$

În primul membru, deoarece mediul este imobil, se poate deriva sub semnul integrală și ținînd seama de ecuațiile lui Maxwell avem:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{E}\bar{D} + \bar{H}\bar{B}}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{D^2}{2\varepsilon} + \frac{B^2}{2\mu}\right) = -\frac{1}{2\varepsilon} \cdot 2\,\bar{D}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} -$$

$$-\frac{1}{2\mu} \cdot 2\,\bar{B}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\bar{E}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} - \bar{H}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\bar{E}\,(\operatorname{rot}\bar{H} - \bar{J}) - \bar{H}(-\operatorname{rot}\bar{E}) =$$

$$= \bar{E} \cdot \bar{J} + (\bar{H}\operatorname{rot}\bar{E} - \bar{E}\operatorname{rot}\bar{H}) = \bar{E} \cdot \bar{J} + \operatorname{div}(\bar{E} \times \bar{H}).$$

Înlocuind în (27.16) obținem:

$$\int_{V_\Sigma} -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{E}\bar{D} + \bar{H}\bar{B}}{2}\right) dv = \int_{V_\Sigma} [\bar{E} \cdot \bar{J} + \operatorname{div}(\bar{E} \times \bar{H})]\, dv = \int_{V_\Sigma} \bar{E}\bar{J}\, dv + \bar{P}_\Sigma.$$

Ținînd seama de teorema lui Gause — Ostrogradsky, rezultă:

$$\underbrace{-\frac{d}{dt}\int_{V_\Sigma} \frac{1}{2}(\bar{E}\,\bar{D} + \bar{H}\,\bar{B})\, dv}_{-\frac{dW}{dt}} = \underbrace{\int_{V_\Sigma} \bar{E}\,\bar{J}\, dv}_{P_J} + \underbrace{\oint_\Sigma (\bar{E} \times \bar{H}) \cdot dA}_{P_\Sigma}. \tag{27.17}$$

Această consecință a ecuațiilor lui Maxwell este teorema energiei electromagnetice: *viteza de scădere a energiei cîmpului electromagnetic dintr-un domeniu limitat de o suprafață închisă* Σ *este egală cu suma dintre puterea cedată corpurilor din interiorul domeniului (numai în conductoare în cazul corpurilor imobile) și fluxul prin suprafața* Σ *al vectorului* $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$, *numit densitatea fluxului de energie electromagnetică (sau vectorul lui Poynting).*

Fluxul de energie electromagnetică printr-o suprafață oarecare Σ este deci:

$$P_\Sigma = \oint_\Sigma \bar{S} \cdot \overline{dA} = \oint_\Sigma (\bar{E} \times \bar{H})\ \overline{dA} = \oint_\Sigma (\bar{E} \times \bar{H})\ \bar{n} \cdot dA. \quad (27.18)$$

Sensul ales pentru normala $\bar{n}$ la suprafață este sensul de referință al fluxului de energie. Dacă $P_\Sigma > 0$, cu un anumit $\bar{n}$, rezultă că energia se transmite efectiv în acest sens.

27.4. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC VARIABIL ÎN CONDUCTOARE MASIVE

Studiul circuitelor electrice de curent variabil a fost făcut în cadru a două aproximații fundamentale: caracterul cvasistaționar al regimului de funcționare și caracterul filiform al conductoarelor care constituie circuitul. În cele ce urmează se vor prezenta cîteva probleme în care se ia în considerare repartiția (neuniformă) a curentului pe secțiunea conductoarelor, adică se renunță la aproximația caracterului filiform. În schimb se menține ipoteza regimului cvasistaționar, adică se neglijează densitatea curentului de deplasare $\bar{J}_D = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ pe lîngă densitatea curentului de conducție $\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E}$. Cît timp se studiază materiale conductoare propriu-zise (metale), care au conductivitatea $\sigma > 10^6$ $[\Omega^{-1} \cdot m^{-1}]$, ipoteza regimului cvasistaționar este pe deplin justificată în toate problemele tehnice relative la studiul cîmpului electromagnetic din interiorul lor.

În adevăr, admițînd o variație sinusoidală cu frecvența $f = \frac{\omega}{2\pi}$ a mărimilor avem: $J_D = \varepsilon\omega E$ și $J = \sigma \cdot E$. Regimul cvasistaționar e realizat dacă $J_D \ll J$ adică, $\varepsilon\omega \ll \sigma$ sau $\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{\tau}$; τ fiind așa numitul timp de relaxare al materialului.

Cu valoarea $\sigma = 10^6\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ și $\omega = 2\pi f$, se obține: $f \ll 10^{16}$ Hz. Cele mai mari frecvențe utilizate azi în tehnică fiind de ordinul a 10^{10} Hz, condiția e totdeauna satisfăcută. De aceea, chiar în regimul general variabil al undelor electromagnetice, în care se renunță în general la aproximația regimului cvasistaționar și la cea a circuitelor filiforme, se neglijează curentul de deplasare în mediile de conductivitate ridicată, cum sînt metalele.

27.4.1. Ecuaţiile cîmpului electromagnetic în conductoare masive

Rezolvarea problemelor repartiţiei neuniforme a curentului pe secţiunea conductoarelor masive şi a pierderilor prin efectul Joule-Lenz corespunzătoare se poate face numai pe baza legilor cîmpului electromagnetic, şi în particular, pe baza ecuaţiilor lui Maxwell pentru medii conductoare:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{D} &= \rho_v \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{27.19}$$

Într-un mediu de permeabilitate μ, de permitivitate ε şi de conductivitate $\sigma = \frac{1}{\rho}$ (ρ este rezistivitatea) şi fără cîmp electric imprimat (cîmpul electric imprimat E_i, este, în general, constant şi nu reprezintă interes în regim variabil), ecuaţiile de mai sus se completează cu relaţiile de material:

$$\bar{B} = \mu \bar{H}\,;\ \bar{D} = \varepsilon \bar{E}\,;\ \bar{J} = \sigma \bar{E} = \frac{1}{\rho} \bar{E}. \tag{27.20}$$

În medii omogene mărimile ε, μ şi σ sînt constante. Introducînd relaţiile (27.20) în primele două ecuaţii din (27.19) şi neglijînd densitatea curentului de deplasare $\frac{\partial D}{\partial t}$, în conformitate cu cele arătate mai înainte, se obţin expresiile:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{J} = \sigma \bar{E} \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{27.21}$$

care reprezintă ecuaţiile fundamentale ale cîmpului electromagnetic în conductoare masive omogene.

Luînd rotorul fiecăreia dintre ecuaţiile (27.21), folosind identitatea: $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{G}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{G}) - \Delta \bar{G}$, unde $\Delta \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ este *operatorul laplacean* şi ţinînd seama că cei trei vectori cîmp $\bar{E}$, $\bar{H}$ şi $\bar{J}$ sînt, în acest caz, solenoidali rezultă: $\operatorname{div} \bar{E} = 0$, $\operatorname{div} \bar{H} = 0$, $\operatorname{div} \bar{J} = 0$; se obţin ecuaţiile de ordinul al doilea satisfăcute de vectorii cîmp $\bar{H}$, $\bar{B}$, $\bar{E}$, $\bar{J}$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \bar{H} &= \sigma \cdot \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}\,;\ \Delta \bar{B} = \sigma \cdot \mu \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \Delta \bar{J} &= \sigma\mu \cdot \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}\,;\ \Delta \bar{E} = \sigma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{27.22}$$

În problemele de determinare a cîmpului trebuie să se observe că ecuaţiile de ordinul doi (27.22) au soluţii care sînt legate între ele prin ecuaţiile de ordinul întîi (27.21). Ele trebuie completate, la suprafeţe de discontinuitate, cu condiţiile de conservare a componentelor tangenţiale ale vectorilor $\overline{E}$ şi $\overline{H}$: $E_{t1} = E_{t2}$, $H_{t1} = H_{t2}$ şi a componentelor normale ale vectorilor $\overline{B} = \mu\overline{H}$ şi $\overline{J} = \sigma\overline{E}$:

$$\mu_1 \; H_{n1} = \mu_2 H_{n2}; \quad \sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 \; E_{n2}.$$

În cele ce urmează vom studia numai probleme referitoare la regimul permanent sinusoidal, în care se poate utiliza şi reprezentarea în complex. Dacă $\underline{\overline{E}}$, $\underline{\overline{H}}$ şi $\underline{\overline{J}}$ sînt imaginile în complex ale vectorilor $\overline{E}$, $\overline{H}$ şi $\overline{J}$ ecuaţiile (27.21) devin:

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{\overline{H}} &= \sigma \; \underline{\overline{E}} = \underline{\overline{J}} \\ \text{rot } \underline{\overline{E}} &= -j\,\omega\,\underline{\overline{H}}. \end{aligned} \tag{27.23}$$

Principalele clase de cîmp electromagnetic în medii conductoare care interesează în tehnică sînt următoarele:

— probleme de *curenţi turbionari* (sau Foucault), în care se studiază curenţii induşi într-un conductor masiv de un cîmp magnetic variabil în timp;

— probleme de *efect pelicular* (curenţi de aducţie), în care se studiază repartiţia neuniformă a unui curent alternativ dat, pe secţiunea conductorului străbătut de acest curent;

— probleme de *efect de proximitate* (vecinătate), în care se studiază modificarea repartiţiei unui curent alternativ dat pe secţiunea conductorului, sub acţiunea cîmpului magnetic al altor conductoare vecine.

27.4.2. Pătrunderea cîmpului electromagnetic în semispaţiul conductor infinit

Considerăm un bloc de material conductor, de permeabilitate μ şi conductivitate σ, limitat spre stînga de o faţă plană, teoretic infinit extinsă şi ocupînd întregul semispaţiu drept (fig. 27.3).

Alegem un sistem de axe cartezian ca în figură, cu axa Ox normală pe faţa blocului şi dirijată spre interior. Se cere să se studieze pătrunderea cîmpului electromagnetic şi repartiţia curentului în acest semispaţiu conductor, ştiind că la suprafaţa lui este stabilit în exterior un cîmp magnetic omogen tangenţial $\overline{H}_0$, care variază sinusoidal în timp (origine de fază):

$$\overline{H}_0 = \overline{k} \; H_0(t), \quad \text{unde:} \quad H_0(t) = H_{0\,max} \; \sin \; \omega t.$$

Se studiază numai regimul permanent şi se consideră că datorită extinderii infinte a blocului în direcţiile Oy şi Oz şi a caracterului omogen al cîmpului magnetic la suprafaţa lui, toate mărimile de stare locală au aceeaşi

valoare în toate punctele oricărui plan $x = \text{const.}$, paralel cu fața blocului. Altfel spus, toate aceste mărimi sînt funcțiuni numai de x și de t (undă plană), adică în interiorul blocului:

$$\overline{H} = \overline{H}(x,t)\,;\ \overline{E} = \overline{E}(x,t)\,;\ \overline{J} = \overline{J}(x,t)$$

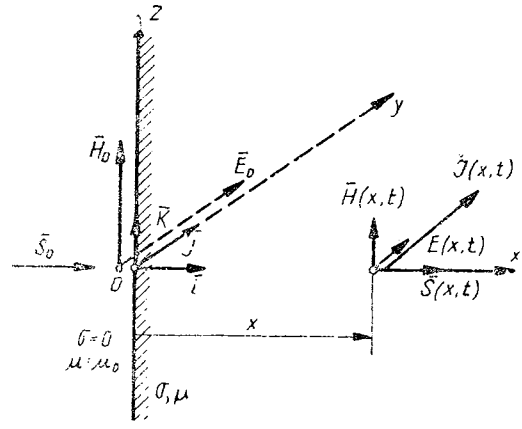


Fig. 27.3.

Deoarece la suprafața blocului se conservă componentele tangențiale ale cîmpului $\overline{H}$, valoarea acestuia în interior pentru $x \to 0$ trebuie să fie egală cu cîmpul tangențial exterior:

$$\overline{H}(0,t) = \overline{H}_0 = \bar{k}\ H_0(t)$$

și putem admite că în oricare alt punct, $\overline{H}$ are numai componente după Oz, adică: $\overline{H}(x,t) = \bar{k}\ H_z(x,t)$ cu $H_z(0,t) = H_0(t) = H_{max}\ \sin \omega t$.

Din relațiile (27.22) rezultă:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \sigma \cdot \mu \cdot \frac{\partial H_z}{\partial t}. \tag{27.24}$$

În regim permanent sinusoidal această ecuație scrisă în complex este:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \underline{H}_z}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{j}\omega\mu\ \sigma \cdot \underline{H}_z = \underline{\gamma}^2\, \underline{H}_z \tag{27.25}$$

astfel că $H_z(x,t) = \mathcal{I}m\{\sqrt{2}\ H_z \cdot e^{j\omega t}\}$.

Constanta de propagare ($\underline{\gamma}$) este:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\sigma} = \alpha(1 + \mathrm{j}) = \sqrt{2}\ \alpha\ e^{j\frac{\pi}{4}} \tag{27.26}$$

deoarece $\sqrt{\mathrm{j}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{j})$. Constanta de atenuare, egală cu constanta de fază, este:

$$\alpha = \mathcal{R}e\{\underline{\gamma}\} = \mathcal{I}m\{\underline{\gamma}\} = \frac{|\underline{\gamma}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}.$$

Ecuația (27.25) este o ecuație diferențială liniară de ordinul II, cu coeficienți constanți, avînd ecuația caracteristică $r^2 = \underline{\gamma}^2$ sau $r = \pm \underline{\gamma} = \pm\,(\alpha + \mathrm{j}\alpha)$ și a cărei soluție este:

$$\underline{H}_z = \underline{A}_1\ e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\underline{\gamma} \cdot x}. \tag{27.27}$$

Deoarece blocul conductor este presupus infinit ($0 \leqslant x \leqslant \infty$), unda inversă trebuie să se anuleze, pentru a avea cîmp magnetic finit la $x \to \infty$, adică $\underline{A}_2 = 0$.

Cu $x = 0$, $\underline{H}_z = \underline{H}_z(0) = \underline{A}_1$, rezultă soluţia:

$$\underline{H}_z = \underline{H}_z(0)\ e^{-\underline{\gamma} x}.$$

Dar $\underline{H}_z(0) = \underline{H}_0 = \frac{H_{0\,max}}{\sqrt{2}}$ este imaginea complexă a cîmpului magnetic la faţa blocului (origine de fază), aşa că putem scrie:

$$\underline{H}_z = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{0\,max}\, e^{-\underline{\gamma} x} = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{0\,max} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\alpha \cdot x},$$

iar valoarea instantanee este:

$$H_z(x,t) = H_{0\,max} \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \sin\,(\omega\, t - \alpha x). \tag{27.28}$$

Aceasta este o undă elementară directă, puternic atenuată, cu viteza de fază v şi lungimea de undă λ date de relaţiile:

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}};\ \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu\sigma}}. \tag{27.29}$$

Densitatea de curent $\overline{J}$ şi intensitatea cîmpului electric $\overline{E}$ se deduc din prima ecuaţie a lui Maxwell (27.21) observînd că, deoarece $\overline{H} = \overline{k}\, H_z(x, t)$, singurele componente nenule ale rotorului lui $\overline{H}$, şi deci ale acestor vectori, sînt dirijate după Oy (paralel cu faţa blocului şi perpendicular pe direcţia lui $\overline{H}$).

$$\overline{J} = \text{rot}\ \overline{H} = \overline{j}\ J_{\overline{y}}(x,t);\ \overline{E} = \frac{1}{\sigma}\overline{J} = \overline{j}\, E_y(x,t).$$

Dezvoltînd rotorul lui $\overline{H}$, se obţin relaţiile:

$$\underline{J}_y = -\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{0\,max} \cdot \alpha\,(1 + j) \cdot e^{-\underline{\gamma} x} = \alpha \cdot H_{0\,max}\, e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\underline{E}_y = \frac{1}{\sigma}\underline{J}_y = \frac{\alpha}{\sigma} H_{0\,max}\, e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Valorile instantanee sînt:

$$J_y(x,t) = \alpha\ H_{0\,max}\sqrt{2}\ e^{-\alpha x} \cdot \sin\left(\omega t - \alpha\ x + \frac{\pi}{4}\right) \tag{27.30}$$

$$E_y(x,t) = \frac{\alpha}{\sigma} H_{0\,max}\sqrt{2}\ e^{-\alpha x} \sin\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right),$$

fiind defazate cu $\frac{\pi}{4}$ înaintea cîmpului magnetic (fig. 27.4).

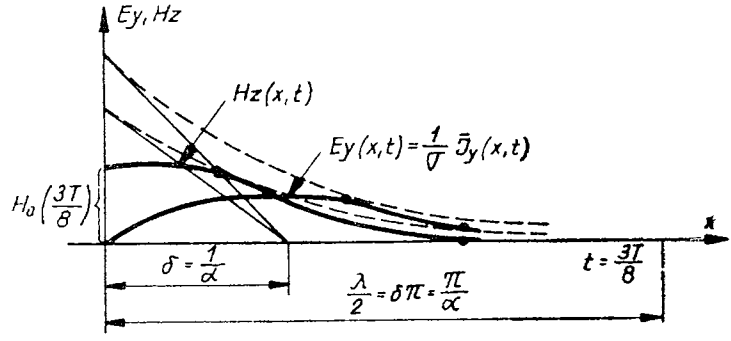


Fig. 27.4.

Deoarece $\overline{E} = \overline{j}\, E_y$ şi $\overline{H} = \overline{k}\, H_z$, vectorul densităţii fluxului de energie (vectorul Poynting) este dirijat în sensul x-ilor pozitivi (în care se propagă undele elementare $H_z(x,t)$ şi $E_y(x,t)$) :

$$\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H} = (\overline{j} \times \overline{k})\, E_y H_z = \overline{i}\, E_y H_z = \overline{i}\, S_x(x, t).$$

Cu relaţiile (27.28) şi (27.30), rezultă:

$$S_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{0\,max}^2 \frac{\alpha}{\sigma} e^{-2\alpha x}\left[\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(2\omega t - 2\alpha x + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Mărimea $S_x = |\overline{S}|$ reprezintă puterea instantanee transmisă prin unitatea de suprafaţă (a planelor $x = \text{const.}$). Acest flux de energie provine de la cîmpul electromagnetic exterior şi scade rapid odată cu pătrunderea în conductor, datorită exclusiv faptului că acoperă pierderile locale de putere prin efect Joule — Lenz. Practic, aceste pierderi locale sînt importante numai aproape de suprafaţa blocului unde $x < \frac{1}{2\alpha}$.

Valoarea aportului de putere instantanee prin unitatea de suprafaţă a conductorului este:

$$S_x(0, t) = S_0(t) = \frac{P(t)}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{0\,max}^2 \frac{\alpha}{\sigma}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

şi are ca medie în timp puterea activă specifică (primită de conductor prin unitatea de suprafaţă laterală):

$$\frac{\widetilde{P}(t)}{A} = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} H_{0\,max}^2 \frac{\alpha}{\sigma} = H_{0\,ef}^2 \frac{\alpha}{\sigma}. \tag{27.31}$$

Atît cîmpul electric şi cel magnetic, cît şi densitatea de curent au valori importante numai în vecinătatea suprafeţei conductorului, valorile lor efective scăzînd exponenţial odată cu depărtarea de la suprafaţa conductorului. Din (27.30) rezultă:

$$J_{y\,ef} = \alpha H_{0\,max} e^{-\alpha x}. \tag{27.32}$$

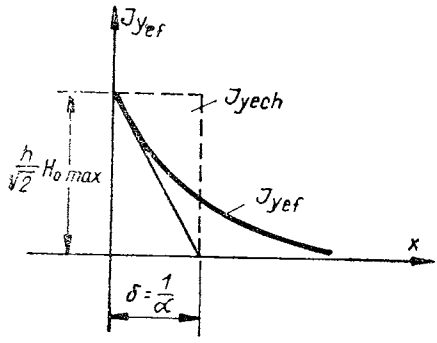


Fig. 27.5.

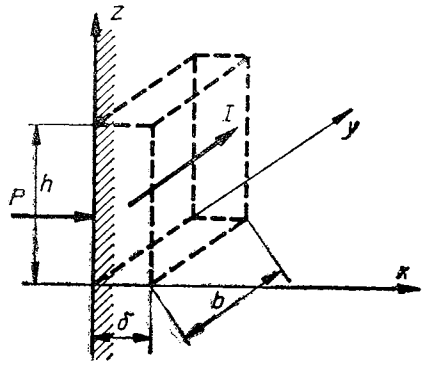


Fig. 27.6.

Se numeşte *adîncime de pătrundere* (sau adîncime echivalentă de pătrundere) a cîmpului electromagnetic în semispaţiul conductor, distanţa δ de la suprafaţa acestui semispaţiu, pe care ar trebui repartizat în mod uniform şi sinfazic curentul total, pentru ca pierderile de putere activă să fie aceleaşi ca şi în cazul repartiţiei reale exponenţiale.

Curentul total pe înălţimea h (în sensul Oz) este:

$$I = \int_0^\infty J_y(x)\, h\, \mathrm{d}x = -h \int_0^\infty \frac{\partial H_z}{\partial x} \mathrm{d}x = h\,[H_z(0) - H_z(\infty)] = hH_0$$

şi are valoarea efectivă:

$$I = hH_{0\,ef} = \frac{h}{\sqrt{2}} H_{0\,max}.$$

Dacă ar fi repartizat uniform şi sinfazic pe grosimea δ, ar avea o densitate de curent echivalentă:

$$J_{y\,echiv} = \frac{I}{h\delta} = \frac{H_{0\,max}}{\sqrt{2} \cdot \delta} \tag{27.33}$$

(vezi curba punctată din figura 27.5).

Valoarea adîncimii de pătrundere se obţine egalînd pierderile reale de putere activă cu cele ce s-ar obţine cu repartiţia uniformă a curentului în stratul de grosime δ.

Pentru o porţiune dreptunghiulară de arie $A = h \cdot b$ din faţa blocului (fig. 27.6) puterea activă absorbită de la cîmp este (cu 27.31):

$$P = \left(\frac{P}{A}\right) hb = \frac{\alpha}{\sigma} \frac{H_{0\,max}^2}{2} hb.$$

Dacă curentul ar fi uniform repartizat pe grosimea δ, ar determina în volumul paralelipipedic $(h \cdot \delta \cdot b)$ pierderi de putere:

$$P = RI^2 = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{b}{h\delta} \cdot \frac{h^2 H_{0\,max}^2}{2} = \frac{hb}{2\sigma\delta} H_{0\,max}^2.$$

Egalînd cele două pierderi, rezultă pentru adîncimea de pătrundere expresia :

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}} = \frac{\lambda}{2\pi}. \qquad (27.34)$$

Deci adîncimea de pătrundere este o caracteristică a materialului, depinzînd de regimul de funcţionare (invers proporţională cu rădăcina pătrată a frecvenţei). Această caracteristică este utilă atît pentru calculul pierderilor de putere (ca şi cum întregul curent ar fi repartizat uniform la suprafaţa blocului pe grosimea δ), cît şi pentru a aprecia cu aproximaţie pătrunderea cîmpului electromagnetic în mediul conductor : pentru $x = \delta$, cîmpurile H_z, E_y, J_y scad de $e = 2{,}718$ ori, iar vectorul Poynting de $e^2 = 7{,}389$ ori.

În cazul unui conductor oarecare de dimensiuni finite, dacă dimensiunile (raza de curbură minimă a suprafeţei lui) sînt foarte mari faţă de adîncimea de pătrundere corespunzătoare frecvenţei de lucru, această teorie se poate aplica local cu bună aproximaţie, calculînd pierderile de putere activă, pe unitatea de arie laterală în funcţie de valoarea cîmpului magnetic exterior, tangent la suprafaţa laterală. În acest caz se spune că pierderile au fost calculate cu metoda adîncimii de pătrundere. La frecvenţe suficient de înalte (δ foarte mic) se poate întotdeauna aplica această metodă.

27.4.3. Curenţi turbionari

Se numesc curenţi turbionari Foucault, *curenţii induşi într-un conductor masiv de un cîmp magnetic variabil în timp*. În aplicaţii tehnice, curenţii turbionari apar în miezurile feromagnetice ale circuitelor magnetice din maşinile şi aparatele electrice de curent alternativ, determinînd pierderi suplimentare de putere prin efect Joule-Lenz şi înrăutăţind funcţionarea acestor maşini şi aparate.

Totodată, există numeroase aplicaţii utile ale acestor curenţi : încălzirea electrică prin inducţie (în care se utilizează puterea dezvoltată de aceşti curenţi pentru a încălzi şi chiar pentru a topi conductorul), frînele şi ambreiajele electromagnetice de inducţie (în care se utilizează forţele pe care cîmpul magnetic le exercită asupra conductorului parcurs de aceşti curenţi) etc.

Deoarece, prin apariţia curenţilor turbionari şi a cîmpului magnetic suplimentar, produs de aceşti curenţi (numit şi cîmp magnetic de reacţie al curenţilor turbionari), repartiţia cîmpului magnetic în cuprinsul conductorului este mai mult sau mai puţin influenţată, rezolvarea exactă a acestor probleme necesită utilizarea ecuaţiilor generale (27.21). În cazurile limită ale frecvenţelor joase (cîmp magnetic de reacţiune neglijabil) şi ale frecvenţelor înalte (adîncime de pătrundere mică faţă de dimensiunile conductorului) se utilizează metode aproximative (metoda iteraţiei şi metoda semispaţiului infinit).

În continuare se va urmări determinarea teoretică a pierderilor prin curenţi turbionari în tole.

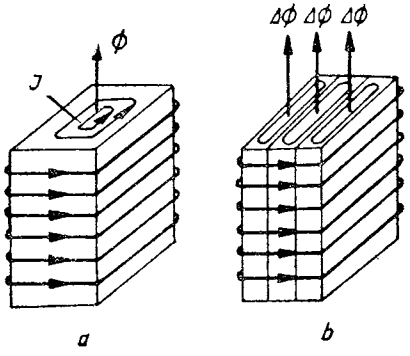


Fig. 27.7.

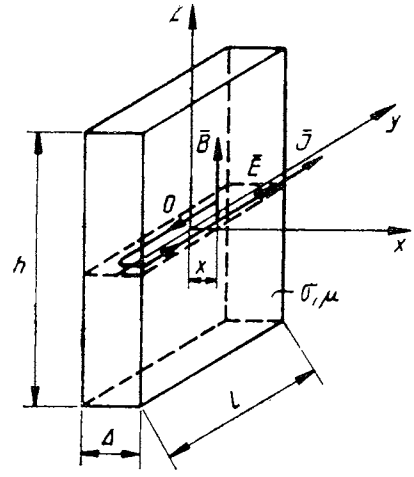


Fig. 27.8.

Miezul feromagnetic al unui circuit magnetic, cu o înfăşurare de curent alternativ (figura 27.7, *a*) este străbătut de un flux magnetic $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$, sub acţiunea căruia se induc curenţi cu liniile de curent conţinute în plane transversale faţă de liniile cîmpului magnetic. Pentru a reduce pierderile de putere date de aceşti curenţi (pierderile în fier prin curenţi turbionari), se divizează miezul în tole, izolate între ele (fig. 27.7, *b*) ceea ce măreşte rezistenţa căilor de închidere ale acestor curenţi şi reduce intensitatea lor.

Considerăm o astfel de tolă (fig. 27.8) de înălţime h, lăţime l şi grosime Δ foarte mică ($\Delta \ll l$, $\Delta \ll h$). Dacă neglijăm cîmpul magnetic de reacţie al curenţilor induşi, inducţia magnetică în tolă este omogenă:

$$\bar{B} = \bar{k} B_z(t)$$

Valoarea instantanee şi reprezentarea în complex sînt:

$$B_z(t) = B_{max} \sin \omega t \leftrightarrows \underline{B}_z = \frac{1}{\sqrt{2}} B_{max}.$$

Deoarece tola e foarte subţire, o putem considera infinit extinsă din punctul de vedere al repartiţiei curentului în zona ei centrală (adică neglijînd întoarcerea liniilor de curent la marginile ei). Putem admite atunci că densitatea de curent $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ e dirijată în sensul axei Oy şi depinde numai de variabila spaţială x:

$$\bar{J} = \bar{j} J_y(x, t); \quad \bar{E} = \bar{j} E_y(x, t).$$

Cîmpul electric indus în tolă de cîmpul magnetic variabil (rot $\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$) este (singura componentă nenulă):

$$\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(t)}{\partial t}$$

iar în complex:

$$\frac{\mathrm{d}\underline{E}_y(x)}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{j}\omega\underline{B}_z = -\mathrm{j}\omega\frac{B_{max}}{\sqrt{2}}.$$

Integrînd se obține cîmpul electric:

$$\underline{E}_y(x) = -\mathrm{j}\omega\frac{B_{max}}{\sqrt{2}}\cdot x + C.$$

Constanta de integrare rezultă $C = 0$, deoarece din motive de simetrie $\underline{E}_y(-x) = \underline{E}_y(x)$. Atunci, densitatea de curent devine:

$$\underline{J}_y(x) = \sigma\underline{E}_y(x) = -\mathrm{j}\omega\sigma\cdot\frac{B_{max}}{\sqrt{2}}x = \omega\sigma\frac{B_{max}}{\sqrt{2}}\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}},$$

avînd valoarea instantanee:

$$J_y(x, t) = \omega\cdot\sigma\cdot B_{max}\cdot x\cdot\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Deci curenții induși sînt proporționali cu frecvența, sînt defazați în urma fluxului magnetic inductor cu $\frac{\pi}{2}$ și variază liniar (cu x) în grosimea tolei. Densitatea de volum a puterii instantanee disipate prin efect Joule este:

$$p_J(x, t) = \frac{1}{\sigma}J_y^2(x, t) = \omega^2\cdot\sigma\cdot B_{max}^2\frac{x^2}{2}(1 + \cos 2\omega t).$$

Puterea instantanee disipată în întreaga tolă se obține prin integrare în tot volumul tolei ($\mathrm{d}v = l\cdot h\cdot\mathrm{d}x$).

$$P_J(t) = \iiint_V p_J(x, t)\,\mathrm{d}v = l\cdot h\cdot\omega^2\cdot\sigma\cdot\frac{B_{max}^2}{2}(1 + \cos 2\omega t)\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2\,\mathrm{d}x,$$

deci,

$$P_J(t) = l\cdot h\cdot\omega^2\cdot\sigma\frac{B_{max}^2}{24}\cdot\Delta^3\cdot(1 + \cos 2\omega t).$$

Puterea activă disipată în tolă se obține luînd media pe o perioadă a acestei expresii:

$$P_J = \tilde{P}_J(t) = (l\cdot h\cdot\Delta)\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot f^2\cdot\sigma\cdot B_{max}^2\cdot\Delta^2 \quad [\mathrm{W}].$$

Pierderile specifice prin curenți turbionari (pierderile pe unitatea de volum a tolei) sînt:

$$p_J = \frac{P_J}{V} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot f^2\cdot\Delta^2\cdot B_{max}^2. \qquad (27.35)$$

Observații

— Aceste pierderi au fost calculate la frecvențe suficient de joase, pentru a neglija cîmpul magnetic al curenților induși. Această aproximație corespunde cazului cînd grosimea tolei e foarte mică față de adîncimea de pătrundere: $\Delta \ll \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\tau}}$.

În practică, la $f = 50$ Hz, în fier $\delta = 1 - 2$ mm, iar tolele au $\Delta = 0{,}5$ mm sau 0, 35 mm. Studiul exact arată că în aceste condiții aproximarea de mai sus este satisfăcătoare.

— După cum se observă din (27.35) pierderile sînt proporționale cu pătratul frecvenței, cu pătratul inducției maxime și cu pătratul grosimii tolei. La frecvență și tole date, proiectantul aparatelor și mașinilor electrice trebuie să asigure o inducție maximă compatibilă cu pierderile admisibile.

— Pierderile sînt invers proporționale cu rezistivitatea tolelor. De aceea se utilizează tole cu rezistivitate mărită, prin îmbogățirea fierului cu siliciu. Se ajunge astfel la pierderi prin curenți turbionari sub 1 W/kg pentru $B_{max} = 1$ tesla (10^4 gauss). În practică interesează însă pierderile totale, care includ și pierderile prin histerezis, cu valori de același ordin de mărime.

27.4.4. Efectul pelicular

Dacă un curent variabil $i(t)$ parcurge un conductor, repartiția curentului nu se mai face uniform pe secțiunea conductorului, ca în regim staționar (în curent continuu). În regim variabil, densitatea de curent are valori mai mici în axul conductorului și valori mai mari la periferia secțiunii. Acest fenomen se numește *efect pelicular* (sau efect skin — de la cuvîntul skin — piele, în limba engleză) sau efect de refulare a curentului și are următoarele consecințe: sporirea pierderilor de putere prin efect Joule-Lenz în conductor, sporirea rezistenței echivalente a conductorului, reducerea inductivității lui interioare și dependența tuturor acestor mărimi de frecvența de lucru.

Efectul pelicular se poate analiza în funcție de raportul dintre raza a a conductorului cu secțiune circulară și adîncimea de pătrundere δ. Acest raport este:

$$\frac{a}{\delta} = a\alpha = a\sqrt{\pi f \sigma \mu}.$$

În curent continuu, acest raport este nul ($f = 0$) și curentul se repartizează uniform pe secțiune (fig. 27.9, *a*).

La frecvențe suficient de joase, astfel ca $\delta \gg a$, pătrunderea cîmpului electromagnetic în conductor începe să fie incompletă și densitatea de curent în *ax* este mai mică (fig. 27.9, *b*). Acesta este *efectul pelicular slab*, în care, în primă aproximație, se poate neglija cîmpul magnetic al curenților induși.

La frecvențe mai înalte, adîncimea de pătrundere scade și ajunge de același ordin de mărime cu raza conductorului ($\delta \approx a$). În acest caz, pătrunderea cîmpului electromagnetic e parțială și efectul de refulare a curentului este important (fig. 27.9, *c*). Acesta este *efectul pelicular mediu*, în care determinarea repartiției curentului se poate face numai integrînd ecuațiile cîmpului (27.21), ceea ce duce la calcule relativ complicate.

La frecvenţe foarte înalte, adîncimea de pătrundere este foarte mică ($\delta \ll a$). În acest caz, cîmpul electromagnetic pătrunde practic, numai într-un strat superficial, de ordinul adîncimii de pătrundere, cu o repartiţie practic identică cu aceea studiată în cazul semispaţiului conductor infinit (fig. 27.9 *d*,). Acesta este *efectul pelicular net* (sau pronunţat), care se studiază asimilînd suprafaţa conductorului cu aceea a unui semispaţiu conductor.

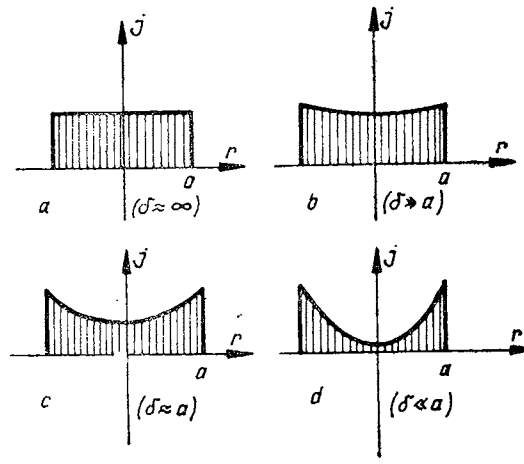


Fig. 27.9.

Din punctul de vedere al teoriei circuitelor electrice, efectul pelicular poate fi explicat, asimilînd conductorul masiv cu un ansamblu de conductoare concentrice, cu pereţii suficient de subţiri, pentru ca în cuprinsul fiecăruia repartiţia curentului să poată fi considerată uniformă. În acest caz conductoarele din interior sînt înlănţuite de mai multe linii de cîmp magnetic, au o inductivitate mai mare şi o impedanţă mai mare şi deci au curent mai mic.

În cazul manifestării efectului pelicular, circuitul nu mai poate fi considerat filiform şi tensiunea în lungul firului, $u_f = \int_C \bar{E}\, \overline{ds}$, depinde de linia de curent C, în lungul căreia se calculează (între capetele conductorului), iar ca urmare, rezistenţa conductorului nu se mai poate defini prin relaţia $u_f = R\, i$, ca în curent continuu.

Puterea activă disipată prin efect Joule-Lenz în conductor se poate însă calcula şi în cazul unei repartiţii neuniforme a curentului, cunoscînd repartiţia densităţii de curent $\bar{J}$ în volumul conductorului:

$$P_J = \iiint_V \rho J_{ef}^2 \mathrm{d}v.$$

Cunoscînd această putere, rezistenţa în curent alternativ a conductorului se defineşte prin relaţia:

$$R_a = \frac{P}{J_{ef}^2} = R_a(\omega)$$

şi este o funcţie de frecvenţă.

Cîtul dintre această rezistenţă şi rezistenţa R_0 în curent continuu a acestui conductor se numeşte factorul de creştere al rezistenţei în curent alternativ:

$$k_a = \frac{R_a}{R_0} = \frac{R_a(\omega)}{R_a(0)} = k_a(\omega),$$

sau pe scurt, *factorul în alternativ* al conductorului. Acest factor depinde numai de forma şi natura conductorului şi de frecvenţă, şi determinarea lui reprezintă principalul obiectiv al cercetărilor în domeniul efectului pelicular.

În domeniul efectului pelicular slab (cînd $\delta \gg a$), adică neuniformitatea liniilor de curent pe secţiunea conductorului este puţin accentuată, factorul în alternativ este puţin diferit de unitate şi determinarea lui se poate face cu metoda iteraţiei. În domeniul efectului pelicular net ($\delta \ll a$), factorul în alternativ este mult supraunitar şi determinarea lui se poate face cu metoda adîncimii de pătrundere. Între aceste două situaţii extreme se poate folosi metoda exactă a integrării ecuaţiilor cîmpului.

ANEXA

NOȚIUNI DE CALCUL VECTORIAL

A.1. ALGEBRA VECTORIALĂ

A.1.1. Vectorii

Mărimile caracterizate de un singur număr real (pozitiv sau negativ) se numesc mărimi scalare sau scalari (masa, lucru mecanic, temperatura etc.). Mărimile pentru care este necesar să se cunoască numărul de unități pe care le cuprinde cît și orientarea în spațiu (direcția și sensul) se numesc mărimi vectoriale sau vectori (forța, viteza etc.). Geometric, o mărime vectorială se reprezintă printr-un segment orientat AB și se notează $\overline{AB} = \bar{a}$ (fig. A.1.1.). Punctul A se numește origine sau punct de aplicație, iar punctul B se numește extremitatea vectorului. Lungimea vectorului $\bar{a}$ se notează $|\bar{a}|$ sau a, și se numește modulul vectorului. Un vector care are modulul egal cu unitatea și este adimensional se numește versor. Versorii axelor de coordonate în sistemul triortogonal Ox, Oy, Oz se simbolizează respectiv prin $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

Proiecțiile vectorului $\bar{a}$ pe axele sistemului de coordonate $Oxyz$ sînt date de relațiile:

$$a_x = a \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, Ox})$$
$$a_y = a \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, Oy}) \qquad \text{(A.1.1.)}$$
$$a_z = a \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, Oz})$$

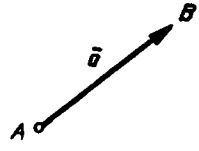


Fig. A.1.1.

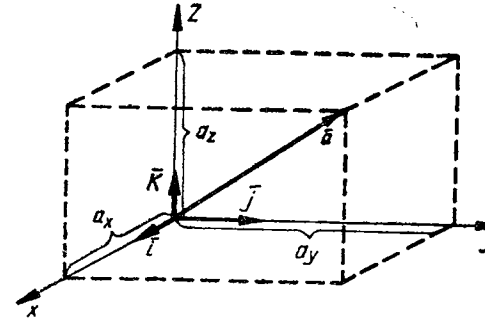


Fig. A.1.2.

Acestea se numesc coordonatele vectorului. Cu aceste relații, vectorul $\bar{a}$ se scrie:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \tag{A.1.2}$$

iar modulul său este:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{A.1.3}$$

Doi vectori sînt egali ($\bar{a} = \bar{b}$), dacă lungimile lor sînt egale și dacă au aceeași orientare în spațiu.

Vectorii paraleli cu o aceeași direcție se numesc coliniari. Doi vectori se numesc opuși, dacă sînt egali ca lungime și opuși ca sens.

Vectorii așezați în același plan se numesc coplanari.

A.1.2. Operații cu vectori

Suma a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este vectorul $\bar{c}$, reprezentat prin diagonala paralelogramului avînd ca laturi vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (fig. A.1.3). Suma vectorială este comutativă și asociativă:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \tag{A.1.4}$$

și

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}). \tag{A.1.5}$$

Diferența a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este vectorul $\bar{d}$, egal cu suma vectorilor $\bar{a}$ și $-\bar{b}$ (fig. A.1.4) și ea poate fi obținută unind vîrful celui de-al doilea vector cu vîrful primului.

Produsul unui vector $\bar{a}$ cu un scalar m este un vector coliniar cu $\bar{a}$ și avînd modulul $m \cdot a$. Dacă $m > 0$, vectorul $m \cdot \bar{a}$ are același sens cu $\bar{a}$, iar dacă $m < 0$, vectorul $m \cdot \bar{a}$ are sens opus vectorului $\bar{a}$.

Produsul scalar al doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (notația produsului scalar este $\bar{a} \cdot \bar{b}$) se numește produsul dintre modulele lor și cosinusul unghiului dintre cei doi vectori, sau produsul dintre modulul unui vector și proiecția celuilalt vector pe el:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot b \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) \tag{A.1.6}$$

În particular avem:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = a^2. \tag{A.1.7}$$

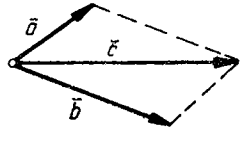


Fig. A.1.3.

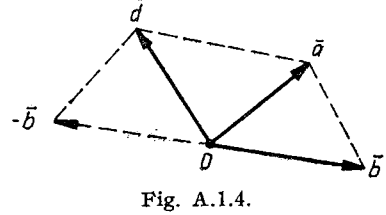


Fig. A.1.4.

Doi vectori paraleli au produsul scalar egal cu produsul modulelor, afectat de semnul + dacă au același sens și de semnul — dacă vectorii au sensuri contrare:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm a \cdot b. \tag{A.1.8}$$

Doi vectori perpendiculari (unghiul dintre ei este 90°) au produsul scalar egal cu zero:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \tag{A.1.9}$$

Produsul scalar al versorilor axelor de coordonate este:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \tag{A.1.10}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \tag{A.1.11}$$

Produsul scalar al vectorilor, prin proiecțiile lor este:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{A.1.12}$$

Produsul vectorial al doi vectori (notația produsului vectorial este $\vec{a} \times \vec{b}$) $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este un vector $\vec{c}$ egal în modul cu aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și având direcția perpendiculară pe planul acestuia (fig. A.1.5), astfel încît vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ (în această ordine) să formeze un triedru drept (direcția vectorului $\vec{c}$ este dată de regula burghiului drept: rotind vectorul $\vec{a}$ spre vectorul $\vec{b}$ pe drumul cel mai scurt, sensul de înaintare al burghiului drept indică sensul vectorului $\vec{c}$).

Modulul vectorului $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ este:

$$c = ab \sin (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \tag{A.1.13}$$

La permutarea vectorilor, produsul vectorial își schimbă sensul:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \tag{A.1.14}$$

Există următoarele relații:

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = m\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times m\vec{b} \tag{A.1.15}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \tag{A.1.16}$$

Doi vectori paraleli au produsul vectorial nul:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0. \tag{A.1.17}$$

iar doi vectori perpendiculari au modulul produsului vectorial egal cu produsul modulelor:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|. \tag{A.1.18}$$

Produsele vectoriale ale versorilor axelor de coordonate sînt:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \tag{A.1.19}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k};\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i};\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \tag{A.1.20}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k};\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i};\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \tag{A.1.21}$$

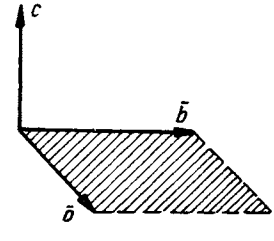


Fig. A.1.5.

Produsul vectorial în funcţie de proiecţiile celor doi vectori pe axele de coordonte se scrie cu determinantul:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \qquad \text{(A.1.22)}$$

dezvoltarea determinantului efectuîndu-se după prima linie.

A.1.3. Sisteme de coordonate

Pentru determinarea poziţiei unui punct în spaţiu, se folosesc următoarele sisteme de coordonate tridimensionale: *1)* sistemul cartezian ortogonal, *2)* sistemul sferic sau polar, *3)* sistemul cilindric sau semipolar (polar în plan).

A.1.3.1. **Coordonatele carteziene** ale punctului M (fig. A.1.6) sînt: abscisa $x = OA$, ordonata $y = AN$ şi cota $z = NM$.

Elementul de arc $\bar{ds}$ al unei curbe C (fig. A.1.7) este un vector tangent la curbă în punctul considerat M, dirijat în sensul arbitrar ales pentru parcurgerea curbei şi egal în modul cu:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad \text{(A.1.23)}$$

Expresia vectorului $\bar{ds}$ este:

$$\bar{ds} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}. \qquad \text{(A.1.24)}$$

Elementul de arie $\bar{dA}$ al unei suprafeţe (fig. A.1.8) este un vector dirijat normal pe planul tangent la suprafaţa S în punctul considerat (asociat după regula burghiului drept în funcţie de sensul ales pentru

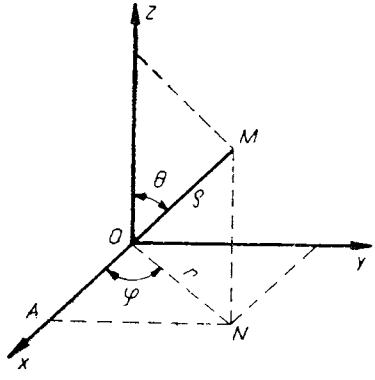


Fig. A.1.6.

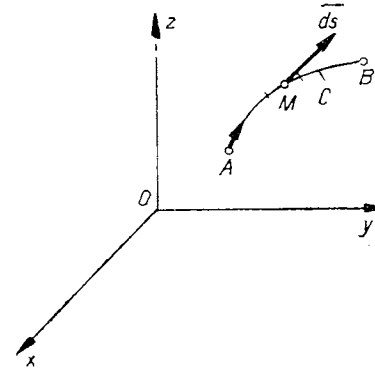


Fig. A.1.7.

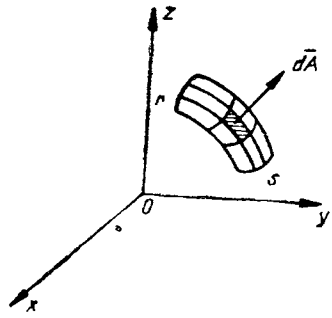


Fig. A.1.8.

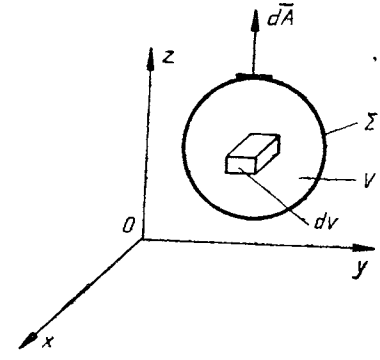


Fig. A.1.9.

parcurgerea conturului Γ pe care se sprijină suprafața S și are proiecțiile:

$$dA_x = dy \cdot dz;\ dA_y = dz \cdot dx;\quad dA_z = dx \cdot dy. \tag{A.1.25}$$

Expresia vectorului $\overline{dA}$ este:

$$\overline{dA} = dy \cdot dz\vec{i} + dz \cdot dx\vec{j} + dx \cdot dy\vec{k}. \tag{A.1.26}$$

În cazul unei suprafețe închise Σ (fig. A.1.9) sensul pozitiv al vectorului $\overline{dA}$ se ia spre exteriorul suprafeței Σ.

Elementul de volum dV (fig. A.1.9) este scalarul:

$$dV = dx\ dy\ dz, \tag{A.1.27}$$

separat din volumul V prin plane paralele cu planele sistemului de coordonate.

A.1.3.2. **Coordonatele sferice ale punctului M** (fig. A.1.6) sînt: raza vectoare $\rho = OM$, unghiul φ (longitudinea) și unghiul θ (distanța polară). Trecerea de la coordonatele carteziene la cele sferice se face cu formulele:

$$x = \rho \sin\theta \cdot \cos\varphi;\ y = \rho \sin\theta \cdot \sin\varphi;\quad z = \rho\cos\theta. \tag{A.1.28}$$

Elementul de arie este

$$dA = \rho^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi, \tag{A.1.29}$$

iar elementul de volum este:

$$dV = \rho^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\rho. \tag{A.1.30}$$

A.1.3.3. **Coordonatele cilindrice** ale punctului M (fig. A.1.6) sînt: raza vectoare r, unghiul polar φ și cota z.

Trecerea de la coordonatele carteziene la cele cilindrice se face cu formulele:

$$x = r\cos\varphi;\quad y = r\sin\varphi;\quad z = z. \tag{A.1.31}$$

Elementul de arie este

$$dA = r\, d\varphi\, dz, \tag{A.1.32}$$

iar elementul de volum este

$$dV = r d\varphi\, dz\, dr. \tag{A.1.33}$$

A.2. ANALIZA VECTORIALĂ

A.2.1. Funcţia vectorială

Dacă vectorul $\bar{a}$ variază în funcţie de un argument scalar x_i, el se numeşte funcţie vectorială de argument scalar şi se notează:

$$\bar{a} = \bar{a}(x_i). \tag{A.2.1}$$

Vectorul $\bar{a}$ poate fi însă o funcţie vectorială de mai multe variabile:

$$\bar{a} = \bar{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{A.2.2}$$

Derivata parţială a funcţiei $\bar{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este prin definiţie:

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta x_i}, \tag{A.2.3}$$

unde $\Delta\bar{a}$ este creşterea lui $\bar{a}$, corespunzătoare creşterii Δx_i a variabilei x_i. Relaţia (A.2.3) presupune existenţa limitei.

Există următoarele reguli de derivare parţială:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{a} + \bar{b} + \ldots) = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{b}}{\partial x_i} + \ldots \tag{A.2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda \bar{a}) = \bar{a}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_i} \tag{A.2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{b}}{\partial x_i} + \bar{b} \cdot \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_i} \tag{A.2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times \frac{\partial \bar{b}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_i} \times \bar{b} \tag{A.2.7}$$

A.2.2. Gradientul unui cîmp de scalari

Fie o funcţie scalară $W(x, y, z)$, definită în toate punctele $P(x, y, z)$ ale unui domeniu (funcţia W se numeşte funcţie de punct deoarece depinde de coordonatele punctului $P(x, y, z)$), care formează un cîmp de scalari. Considerînd integrala de suprafaţă pe suprafaţa închisă Σ:

$$\oint_{\Sigma} W \cdot \overline{dA}, \tag{A.2.8}$$

se numeşte gradient al cîmpului de scalari W, mărimea vectorială definită de relaţia:

$$\operatorname{grad} W = \lim_{V_\Sigma \to 0} \frac{\oint_\Sigma W \, \overline{dA}}{V_\Sigma}. \tag{A.2.9}$$

unde V_Σ este volumul mărginit de suprafaţa închisă Σ, iar limita se consideră pentru restrîngerea suprafeţei Σ asupra punctului P, pentru care se defineşte gradientul. Relaţia (A.2.9) ne dă derivata funcţiei W după o direcţie, care coincide cu direcţia de creştere a funcţiei W (orientată normal pe suprafaţa de nivel a funcţiei).

În coordonate carteziene, gradientul are expresia:

$$\operatorname{grad} W = \frac{\partial W}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\vec{k} = \overline{G}(x, y, z). \tag{A.2.10}$$

Cîmpul de vectori $\overline{G}(x, y, z)$, care depinde de coordonatele punctului $P(x, y, z)$ pentru care s-a definit gradientul, se numeşte cîmp vectorial.

A.2.3. Divergenţa unui cîmp vectorial

Considerînd fluxul vectorial $\overline{G}$ printr-o suprafaţă oarecare S (închisă sau deschisă):

$$\Phi = \int_S \overline{G} \cdot \overline{dA}, \tag{A.2.11}$$

numim divergenţa vectorului cîmp $\overline{G}$, mărimea sclară definită de relaţia:

$$\operatorname{div} \overline{G} = \lim_{V_\Sigma \to 0} \frac{\oint_\Sigma \overline{G} \cdot \overline{dA}}{V_\Sigma}, \tag{A.2.12}$$

unde suprafaţa Σ închide volumul V_Σ, iar limita se consideră pentru restrîngerea suprafeţei asupra punctului în care se consideră divergenţa.

În coordonate carteziene, divergenţa are expresia:

$$\operatorname{div} \overline{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}, \tag{A.2.13}$$

în care G_x, G_y şi G_z sînt componentele vectorului $\overline{G}(x, y, z)$ după cele trei axe.

A.2.4. Rotorul unui cîmp vectorial

Considerînd circulaţia vectorului $\overline{G}$ pe un contur închis Γ, definită de integrala:

$$\oint_\Gamma \overline{G} \cdot \overline{ds}, \tag{A.2.14}$$

numim rotorul vectorului cîmp $\bar{G}$ mărimea definită de limita:

$$\operatorname{rot} \bar{G} = \lim_{A_\Gamma \to 0} \frac{\oint_\Gamma \bar{G} \cdot \bar{ds}}{A_\Gamma}, \tag{A.2.15}$$

unde $\bar{ds}$ este elementul de arc al conturului Γ, iar aria A_Γ este aria curbei plane sprijinită pe conturul Γ. Limita se ia cînd Γ se restrînge asupra punctului P în care se defineşte rotorul.

În coordonate carteziene, expresia rotorului se scrie simbolic cu determinantul:

$$\operatorname{rot} \bar{G} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}, \tag{A.2.16}$$

adică:

$$\operatorname{rot} \bar{G} = \bar{i}\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right). \tag{A.2.17}$$

A.2.5. Formulele lui Stokes şi Gauss–Ostrogradski

Aceste formule leagă circulaţia unui vector de rotorul său şi respectiv, fluxul unui vector de divergenţa sa:

$$\oint_\Gamma \bar{G} \cdot \bar{ds} = \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \bar{G} \cdot \bar{dA} \text{ (formula lui Stokes)}, \tag{A.2.18}$$

unde Γ este conturul pe care se sprijină suprafaţa S_Γ.

$$\oint_\Sigma \bar{G} \cdot \bar{dA} = \int_{V_\Sigma} \operatorname{div} \bar{G} \cdot d\bar{V} \text{ (formula lui Gauss-Ostrogradski)}, \tag{A.2.19}$$

unde Σ este suprafaţa închisă care cuprinde în interior volumul V_Σ.

A.2.6. Operatorul diferenţial vectorial „nabla" (∇) al lui Hamilton

Operatorul nabla (∇) are expresia simbolică:

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{A.2.20}$$

în coordonate carteziene.

Cu ajutorul acestui operator se pot scrie simplificat:

$$\text{grad } W = \nabla W = \frac{\partial W}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\vec{k} \tag{A.2.21}$$

$$\text{div } \vec{G} = \nabla \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \tag{A.2.22}$$

$$\text{rot } \vec{G} = \nabla \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}. \tag{A.2.23}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Andronescu, Pl. *Bazele electrotehnicii*, vol. I, II. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1973.
2. Antoniu, I. S. *Bazele electrotehnicii*, vol. I, II. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1974.
3. Antoniu, I. S. *Chestiuni speciale de electrotehnică*. Bucureşti, Editura Academiei, 1956.
4. Beleţkii, A. J. *Osnovî teorii lineinîh electriceskih ţepei*. Moskva, Izdatelstvo Sviazi, 1967.
5. Bessonov, L. A. *Teoreticeskie osnovî electrotehniki*. Moskva, Vîşşaia Scola, 1964.
6. Manning, L. *Electrical Circuits*. New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1966.
7. Neiman, L.R., Kalantarov, P. L. *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I, II şi III. Bucureşti, E.E.S., 1955.
8. Preda, M. şi colectiv. *Bazele electrotehnicii*, vol. I, II. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1969.
9. Răduleţ, R. *Bazele teoretice ale electrotehnicii*. Bucureşti, Litografia învăţământului, 1954.
10. Savin, G., Rosman, H. *Circuite neliniare şi parametrice*. Bucureşti, Editura tehnică, 1973.
11. Simion, E. *Electrotehnică*. Litografia I.P. Cluj, 1971, reeditat, 1973.
12. Timotin A. şi colectiv. *Bazele electrotehnicii*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1970.

Tiraj: 12 000. Ex. S.P. 80 legate.
Coli de tipar: 25.
Hîrtia: offset 63 gr. Format: 16/70×100.
Bun de tipar: 6.XII.1977. Ediţia: 1977.
Nr. plan: 5639.

Întreprinderea Poligrafică Cluj
Str. Brassai Nr. 5—7
Municipiul Cluj-Napoca
Republica Socialistă România
Comanda Nr. 260.